ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TORINO

POLITECNICO DI TORINO

PROBLEMI ATTUALI DI MECCANICA TEORICA E APPLICATA

Atti del Convegno internazionale a ricordo
del Prof. MODESTO PANETTI
nel centesimo anniversario
della sua nascita

TORINO, 10-12 NOVEMBRE 1975

SUPPLEMENTO DEL VOL. 111 DEGLI
Atti della Accademia delle Scienze di Torino
I - Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
1977

Modesto Panetti

PREFAZIONE

In questo volume sono raccolte le relazioni presentate al Convegno internazionale su « Problemi attuali di Meccanica Teorica ed Applicata » indetto dalla Accademia delle Scienze di Torino per onorare il prof. Modesto Panetti nel centesimo anniversario della sua nascita: alcune riguardano ricerche originali non ancora pubblicate, altre sono relative a problemi già trattati dagli stessi Autori in Note pubblicate in Atti e Riviste di più ampia diffusione, altre infine sono conferenze su argomenti di carattere generale. Nel loro complesso esse danno una visione abbastanza ampia di una grande quantità di problemi che appartengono ai più svariati campi della Meccanica, dalla Emodinamica alla Dinamica dei fluidi, dalla Teoria dell'elasticità alla Termodinamica, dalla Meccanica teorica classica e relativistica alla Cosmologia e alla Astronautica. Tutte hanno un carattere comune: esse vogliono rappresentare il contributo che ciascun Autore ha inteso dare all'omaggio reso dalla Accademia delle Scienze al grande Maestro scomparso, che dell'Accademia stessa fu due volte suo Presidente.

Non è contenuto in questa raccolta il testo della Conferenza tenuta al Convegno dal prof. J. M. Burgers (Premio Panetti 1960), che era l'illustrazione del prezioso volumetto *The Nonlinear Diffusion Equation*, presentato in omaggio all'Accademia in occasione appunto del Convegno.

Come vecchio e affezionato allievo del prof. Modesto Panetti ringrazio vivamente tutti i Relatori, e un particolare ringraziamento rivolgo al Politecnico di Torino, nella persona del suo Rettore, prof. Rolando Rigamonti, al Consigio Nazionale delle Ricerche e alla Associazione Ingegneri e Architetti del Castello del Valentino, che coi loro contributi finanziari dati all'Accademia hanno reso possibile l'organizzazione del Convegno, e all'Accademia dei Lincei, in particolare al suo Presidente prof. Beniamino Segre, per la loro associazione all'omaggio al prof. Panetti.

CARLO FERRARI



Dalla RELAZIONE
del Prof. Francesco Giacomo Tricomi
Presidente della Accademia delle Scienze

La cerimonia odierna è nel tempo stesso inaugurazione del 193° anno accademico di quest'Istituto e del Convegno internazionale su « *Problemi attuali di meccanica teorica e applicata* » a celebrazione del 100° anniversario della nascita del nostro indimenticabile Collega ed ex-Presidente Modesto Panetti e conferimento del Premio internazionale alla sua memoria, che giunge alla sua 8ª edizione ed ha già acquistato grande prestigio.

Sono in primo luogo lieto di porgere il più caldo saluto e benvenuto a tutti gli intervenuti e, in particolar modo, ai figli ed altri congiunti del Prof. Panetti qui presenti e di dare la parola all'illustre Consocio ed amico Beniamino Segre che ci porta l'adesione dell'Accademia dei Lincei di cui è Vicepresidente.

Prof. Beniamino Segre.

« Sono lieto di presenziare a questa solenne cerimonia di apertura del 193° anno accademico dell'Accademia delle Scienze di Torino, a cui mi onoro di appartenere quale Socio Nazionale non residente, soprattutto in quanto la cerimonia per più versi si collega al nome glorioso di Modesto Panetti: figura eminente di scienziato, di maestro e di organizzatore, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita e che ricordo con deferente ammirazione come Uomo integro e puro, da annoverarsi fra i più geniali cultori italiani di meccanica applicata e di scienza delle costruzioni.

« Sono fiero di conservare il certificato di nomina dell'Accademia delle Scienze di Torino, anche perché esso reca in calce la firma di Modesto Panetti, da lui apposta nel 1956 — quasi alla vigilia della Sua dipartita — in qualità di presidente di questo illustre Sodalizio. Mi pregio inoltre di consegnare una copia fotostatica della lettera diretta all'" On. Presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali della R. Accademia Nazionale dei Lincei ", nella quale il Panetti, nel lontano 1922, ringraziava per la Sua nomina — com'Egli dice — a " Socio Corrispondente della 1ª Categoria di codesta R.ª Accademia che tanta parte della attività scientifica italiana ha da tempi lontanissimi coordinato e diretto ".

« Desidero infine esprimere tutta la mia gioia nel ritrovarmi nella diletta città natale, in mezzo a tanti colleghi ed amici, vari dei quali sono anche Soci dell'Accademia dei Lincei, primo fra essi l'illustre professore

Francesco Giacomo Tricomi che oggi occupa il seggio che già fu idealmente di Giuseppe Luigi La Grange Tournier e di Napoleone Bonaparte.

« L'Accademia Nazionale dei Lincei, sensibile ai legami che la uniscono alla consorella Accademia delle Scienze di Torino (p. es. esplicatisi nel 1969 colla comune impresa del Convegno Mendeleeviano), ha deliberato di inviare qui un'apposita delegazione in segno di omaggio e di alto apprezzamento verso Modesto Panetti, che — come ho già accennato — ad essa appartenne per ben 35 anni, prima come Socio Corrispondente e poi, dal 1947, come Socio Nazionale. La delegazione è composta — oltre che da me — dai professori Mauro Picone e Dario Graffi, rispettivamente Amministratore ed uno dei Segretari dell'Accademia dei Lincei; rammarico però che il primo di questi abbia dovuto rinunciare al già predisposto viaggio fra Roma e Torino.

« Anche a nome suo e del collega Graffi, spetta dunque a me l'alto onore di recare l'adesione ed i più fervidi auguri dell'Accademia dei Lincei al Convegno internazionale sul tema " Problemi attuali di meccanica teorica ed applicata ", oggi qui indetto dall'Accademia delle Scienze di Torino a celebrazione del centenario dianzi menzionato. Al Convegno partecipano molti fra i più bei nomi italiani e stranieri delle Scienze meccaniche, sicché esso costituisce un degno tributo verso la memoria del Grande che qui vogliamo onorare, per il quale tutto il mondo scientifico ha da esser grato all'Accademia delle Scienze di Torino.

« Ma v'è anche un'altra e più continuativa forma di onoranza che si intitola a Modesto Panetti, per la quale tengo a manifestare tutto il mio apprezzamento: ed è quella fornita dai Premi Panetti, elargiti dall'omonima Fondazione sorta presso l'Accademia delle Scienze di Torino subito dopo la scomparsa del Panetti, avvenuta nel 1957. Sette di tali Premi sono stati attribuiti a partire dal 1958 ai massimi cultori della Meccanica applicata dei diversi Paesi (quattro dei quali sono attualmente presenti), facendo così di detti Premi una delle più ambite e significative distinzioni. Fra breve verrà qui conferito l'ottavo Premio Panetti ad un altro eminente studioso di Meccanica e Matematica applicata — il professore Ronald S. Rivlin — col quale vivamente mi rallegro — e di cui rammento soltanto che a lui debbonsi studi di magneto-ottica pubblicati in una basilare Memoria lincea, nonché un'importante Relazione concernente i fluidi viscoelastici, tenuta al Convegno internazionale sui " Metodi valutativi nella fisica-matematica " svoltosi nel 1972 a Roma presso l'Accademia dei Lincei.

« Le attività dell'Accademia delle Scienze di Torino alle quali ho accennato in modo necessariamente sommario, hanno già avuto ed ancor più avranno un'ampia risonanza scientifica nel mondo intero; ed è superfluo che io aggiunga ch'esse non sono che una piccola parte di quanto questa Accademia viene miracolosamente facendo a dispetto degli scarsi mezzi concessile.

« Termino auspicando che le autorità cittadine, regionali e nazionali, pienamente edotte dell'enorme valore costruttivo e propulsivo dell'opera insostituibile di questa Accademia, intimamente ispirata alle tradizioni più nobili e feconde, vogliano accordare ad essa un largo appoggio, sì che tale opera possa venir proseguita nell'anno accademico che qui ora ha inizio, senza preoccupazioni di carattere finanziario e con accresciuto fulgore ».

Carlo Ferrari

FLUIDODINAMICA IN BIOINGEGNERIA

Diciotto anni or sono, in questa stessa sala, in questo stesso posto, a fianco dell'allora Presidente Eligio Perucca, inaugurandosi il 175º Anno Accademico di questa Accademia, io assolvevo il doloroso compito di commemorare il Prof. Modesto Panetti, che pochi mesi prima, nel Marzo '57, aveva chiusa la Sua esistenza terrena, Maestro di scienza e di costume fino all'ultimo. Io dissi allora che merito Suo grandissimo, fra i molti altri grandi Suoi meriti, fu la Sua capacità di vedere le nuove vie da seguire per il progresso della Scienza e della Tecnica, dimostrata nel 1912 colla creazione del Laboratorio di Aeronautica prima, e della Scuola Ingegneria aeronautica poi, quando le Scienze aeronautiche erano ancora bambine; coll'impulso dato fin dal 1926 alle ricerche sperimentali sulla influenza della compressibilità nei moti fluidi, quando il cosiddetto *muro del suono* sembrava davvero una barriera invalicabile, perché, se è vero che già nel 1923 il nostro illustre Socio e attuale Presidente Francesco Tricomi aveva dato colle sue ricerche sulla celebre equazione che porta il suo nome il mezzo matematico per lo studio dei regimi transonici, nessuno aveva ancora pensato ad una possibile utilizzazione di tali ricerche nel campo aeronautico; ed ancora colla promozione nel 1948 di tutto un complesso di studi teorici e sperimentali sulle macchine a fluido, che portarono alla costruzione di un compressore assiale a 4 stadi, che fu il primo ad essere costruito in Italia su progetto italiano.

Dovendo ancora io, ora, assolvere il compito di svolgere la prolusione di apertura a un tempo del 193º Anno Accademico e del Congresso promosso per ricordare il Prof. Panetti nel centenario della Sua nascita, mi è sembrato perciò che fosse più in armonia col Suo spirito di Pioniere, sempre teso all'avvenire e non alla contemplazione del passato, prendere come argomento di questa conversazione invece che la illustrazione della Sua opera e delle conseguenze che essa ha portato, la illustrazione di nuove applicazioni, di nuove vie di ricerca di quella Scienza fluidodinamica, al cui progresso Egli diede tanti cospicui contributi.

Ho detto *nuove applicazioni*, ma queste parole non sono del tutto proprie: in effetto la Biomeccanica, ossia la meccanica applicata alla Biologia, si può dire sia nata contemporaneamente alla Meccanica. Basti pensare che quasi tutti coloro che formularono i principi fondamentali della mcccanica classica furono interessati largamente alla loro applicazione in problemi biologici, ed in gran parte furono essi stessi medici: da Galileo, che fu studente di medicina prima di essere fisico, e inventò il termoscopio, l'antenato dell'attuale termometro; a Thomas Young, ben noto agli ingegneri per il modulo di elasticità che porta il suo nome, che fu medico a Londra al St. George Hospital e fondatore dell'ottica fisiologica; per arrivare a Hermann Von Helmholtz, che da parecchi è considerato il padre della Bioingegneria, c fu professore di fisiologia e patologia a Königsberg, di anatomia e fisiologia a Bonn, di fisiologia a Heidelberg, prima di diventare professore di fisica a Berlino: le sue ricerchc in idrodinamica, in particolare le sue equazioni sulla conservazione dei vortici sono altrettanto famose di quelle sull'ottica e sulla acustica fisiologica, e in particolare di quelle relative alla teoria da lui formulata sulla meccanica dell'udito.

L'applicazione della Fluidodinamica in Biologia è pertanto tutt'altro che nuova; d'altra parte è pure vero che mai come in questi ultimi anni si è avuta una fioritura di ricerche in questo campo, dirette non soltanto a comprendere da un punto di vista qualitativo i fenomeni biomeccanici, ma anche a trarre dall'esame di situazioni anomale che questi possono presentare, utili informazioni diagnostiche.

Inoltre, mentre è indubbio che al progresso delle scienze matematiche e meccaniche abbia dato notevole impulso la moderna ingegneria, è anche indubbio che alla maggiore parte degli ingegneri la Bioingegneria appaia ancor oggi come una Scienza del tutto nuova. Eppure la struttura degli organismi viventi presenta una ricchezza di problemi nuovi ed eccitanti, quale è difficile trovare in altri campi, ed il cui studio, se può aprire nuovi capitoli nella medicina e nella biologia, può pure essere illuminante in molte questioni di pura ingegneria.

Fra questi problemi di fluidodinamica fisiologica i primi che si presentano spontanei alla mente sono quelli che si riferiscono alla emodinamica, ossia al moto del sangue in tutto il sistcma cardiovascolare. Questo costituisce una rete idraulica di rara imponenza, o, se si vuole, un sistema di irrigazione colossale: basti pensare [1] che la lunghezza collettiva dei capillari nel corpo umano può arrivare a circa 96.000 km, e pertanto se messi l'uno dietro l'altro essi coprirebbero più di due volte il meridiano equatoriale della terra! il loro numero è di circa $1{,}2 \times 10^9$; essi non sono mai tutti attivi, perché, come in ogni sistema di irrigazione i cunicoli che adducono l'acqua alle culture vengono alternativamente più o meno chiusi da apposite saracinesche, a seconda del bisogno delle culture stesse, così l'azione degli

sfinteri all'ingresso dei capillari continuamente li chiude o li apre al deflusso in modo da soddisfare in ogni istante e in ogni punto alle necessità dei tessuti organici.

Il numero enorme dei capillari è richiesto dalla necessità fisiologica di fare arrivare il sangue in ogni elemento del corpo (una cellula organica non può vivere se essa dista più di 2-3 centesimi di millimetro dal sangue del capillare [2]), ed è nello stesso tempo in armonia con la necessità idrodinamica di evitare un fenomeno oltre modo sgradevole nelle correnti fluide. In effetto, il sangue è spinto dalla contrazione del ventricolo sinistro nella aorta con una accelerazione da 1000 a 5000 cm/sec^2 [3] (ossia da una a cinque volte l'accelerazione di gravità), che gli fa acquistare in detto vaso una velocità massima di circa 100 cm/sec ed una velocità media di circa 35 cm/sec. D'altra parte la velocità nei capillari deve essere molto più piccola, perchè è in essi che avvengono i complessi processi di scambio metabolico comportanti reazioni chimiche che richiedono un certo tempo per prodursi; in effetti, detta velocità è di circa 0,01 cm/sec [4], di guisa che il rapporto di riduzione della velocità appare essere 1/3500. Ora, in un circuito di fluido incompressibile (o quasi) la velocità non può essere ridotta che aumentando l'area della sezione del condotto, e a tutti gli idrodinamici è noto quanto difficile sia ottenere questo risultato evitando il fenomeno cosiddetto della separazione del flusso (il fluido si stacca dalle pareti del condotto), fenomeno questo da evitare sempre, per il grande incremento della resistenza che lo accompagna, e quindi della potenza necessaria per produrre la circolazione, e soprattutto da evitare nei vasi sanguiferi per il danneggiamento che esso produce nei tessuti di questi. Ora, la estrema ramificazione di detti vasi consente, in condizioni normali, cioè non patologiche, di attenere facilmente questo scopo, e questo anche per la seguente circostanza: il parametro che è indice della grandezza relativa delle forze di inerzia rispetto alle forze viscose è il numero di Reynolds Ud/ν, e quando questo parametro è minore di uno, il che avviene già nelle arteriole aventi un diametro minore di 100 μ (0,1 mm), gli effetti tipici delle forze di inerzia scompaiono: non c'è più differenza tra pressione statica e pressione dinamica, non ci sono forze centrifughe, il fluido può variare senza difficoltà, senza perdite, la direzione del suo moto di un angolo qualsiasi, ed ogni pericolo di separazione scompare. Ne deriva, che se si immagina che a partire dalla aorta ogni condotto a un certo punto si biforchi, nelle prime biforcazioni la somma delle aree dei condotti figli deve essere solo di poco superiore all'area del condotto padre, da cui si diramano, per evitare la separazione, ma dopo un certo numero di ramificazioni il numero di Reynolds è già diminuito abbastanza perché detto rapporto di aree possa crescere a valori sempre più grandi senza alcun pericolo. E questo è appunto quello che accade negli organismi animali.

La rete dei vasi sanguiferi si presenta così come una rete estremamente

ramificata, ed una analoga complessità presenta il fluido che la percorre. In effetto il sangue normale è una sospensione di particelle (globuli rossi, globuli bianchi, piastrine) in un mezzo continuo [5], il plasma, costituito da un liquido di composizione prossima a quella dell'acqua di mare, in cui sono sciolte proteine essenzialmente di tre tipi, albumina, globulina e fibrinogeno. A questa complessa composizione del sangue corrispondono proprietà reologiche pure complesse: da queste peraltro si può prescindere nello studio della propagazione delle onde di pressione nelle grandi arterie conseguenti alle contrazioni ritmiche dei muscoli cardiaci. È questo senza dubbio il problema da più lungo tempo preso in esame; la prima ricerca al riguardo fu fatta da Eulero, risale al 1775, e fu pubblicata postuma (in latino) nel 1862 [6]; in essa però la soluzione è indicata come possibile solo nel caso in cui il tubo schematizzante l'aorta è rigido, e detto schema è ben lontano dalla realtà. In effetto, durante la sistole solo una piccola frazione del lavoro compiuto dai muscoli va in energia cinetica del flusso, mentre la più grossa parte è immagazzinata come energia di deformazione nell'aorta e nelle grandi arterie, energia che viene restituita durante la diastole, cosicché la dilatabilità dei grandi vasi permette a questi di compiere la funzione di regolarizzazione del flusso, ossia di riduzione delle variazioni di pressione e di energia cinetica del fluido, che nei sistemi di alimentazione delle reti idrauliche con pompe a stantuffo è compiuta dalle camere, o casse d'aria: ed in effetto una teoria basata su questo concetto fu proposta già nel 1898 dal fisiologo Otto Frank, teoria che fu perciò indicata come *Windkessel Theorie* [7].

Il primo, che ricavò l'espressione della velocità di propagazione delle onde di pressione nella circolazione del sangue fu Thomas Young, mentre Korteweg e Lamb successivamente mostrarono come quella ottenuta da Young fosse la velocità di fase per onde di grande lunghezza d'onda in un tubo circolare, la cui parete è costituita da una membrana elastica ed è riempito da un fluido non viscoso incompressibile. Lo stesso Korteweg diede pure l'espressione di detta velocità quando si tenga conto della compressibilità del fluido, espressione che fu poi riscoperta indipendentemente da Joukowsky, nome ben noto agli aerodinamici, e da Allievi, nome ben noto agli idraulici, nelle loro ricerche sul colpo d'ariete nelle condotte forzate.

Alle ricerche menzionate ne seguirono numerosissime altre, in gran parte delle quali le equazioni sono linearizzate: la circostanza fortunata che l'equazione linearizzata del flusso non stazionario unidimensionale in un tubo elastico è formalmente identica alla cosiddetta *equazione dei telegrafisti*, bastando far corrispondere alla portata fluida la intensità della corrente elettrica, alla pressione il potenziale elettrico, alla cedevolezza del tubo la capacità, alla massa del fluido l'induttanza, permette di utilizzare per la realizzazione e lo studio di un modello matematico del sistema circo-

latorio tutta la mole ricchissima di risultati ottenuti nell'ingegneria elettrotecnica per lo studio delle linee di trasmissione [8]. Questo ha permesso di far luce su vari aspetti di problemi particolari del sistema circolatorio. Deve però essere osservato che la linearizzazione delle equazioni per detto sistema corrisponde soltanto ad una prima grossolana schematizzazione; infatti, se si fa ad esempio l'analisi di Fourier delle oscillazioni di pressione nell'aorta si trova che le ampiezze delle prime cinque armoniche delle oscillazioni stesse sono dello stesso ordine di grandezza della componente stazionaria. Inoltre le deformazioni dei tessuti, che costituiscono le pareti dei vasi sanguiferi, sono relativamente notevoli, e la relazione di proporzionalità tra sollecitazioni e deformazioni è ben lungi dall'essere verificata [9]. Dette pareti sono infatti composte essenzialmente da tre materiali, e precisamente dalla elastina, dalle fibre collagene e dai muscoli lisci, i quali ultimi peraltro hanno scarsa influenza nella determinazione del diagramma tensioni-deformazioni. La elastina è notevolmente elastica e deformabile, mentre le fibre collagene, che pure hanno un comportamento elastico, sono molto più rigide della elastina, e sono chiamate in causa, cioè a reagire, dalla elastina stessa solo quando questa sia sufficientemente deformata; a mano a mano però che la deformazione cresce il legame tra alcune delle fibre collagene e l'elastina si rompe, e questo porta ad uno slittamento di dette fibre all'interfaccia collageno-elastina dando luogo ad un comportamento visco-elastico che dipende dalla velocità con la quale la deformazione è prodotta.

Il processo di slittamento si propaga successivamente a tutte le fibre, e quando questo avviene tutto il carico esterno è sopportato dal collageno. Si comprende da ciò quanto complessa sia in effetto la relazione tra tensioni e deformazioni, e problematica la possibilità di una linearizzazione della relazione stessa.

Ricerche in cui né le equazioni del moto, né le proprietà elastiche dei tessuti biologici sono linearizzate sono pure state fatte in numero notevole, essenzialmente applicando il metodo delle caratteristiche, metodo che soprattutto gli aerodinamici hanno contribuito a perfezionare e diffondere. Io mi limiterò ora a questo riguardo a segnalare un problema che ha interessato l'aerodinamica, e che interessa la biologia, e che è stato oggetto di notevoli ricerche da parte di parecchi Autori, tra i quali Anliker del Dipartimento di Aeronautica ed Astronautica della Stanford University [10].

Ho già implicitamente detto che le equazioni del flusso non stazionario unidimensionale del sangue nelle arterie sono di tipo iperbolico, precisamente come avviene per le equazioni del flusso supersonico di un fluido perfetto compressibile. Ora per detti flussi supersonici la formazione di onde d'urto, ossia di superfici di discontinuità della pressione, è fenomeno familiare agli aerodinamici, e direi a tutti, perchè tutti si sono ormai familiarizzati al tipico *bang* degli aeroplani supersonici. È ovvio pertanto domandarsi

se anche nel flusso del sangue un fenomeno siffatto, certamente non desiderabile, può prodursi. Osserviamo, per questo, che l'onda d'urto nei problemi di moto come quello in esame avviene in conseguenza del fatto che le onde che propagano le successive accelerazioni impresse al fluido, ciascuna delle quali avanza con una velocità più grande di quella precedente, in una certa sezione del condotto, se questo è indefinito, si sovrappongono, e in questa sezione si ha l'urto, ossia una variazione istantanea e finita di velocità, e una variazione istantanea non nulla di pressione. Ora la distanza della sezione d'urto dalla sezione da cui le onde partono, nel nostro problema della sezione iniziale dell'aorta, dipende dalla ripidità dell'onda in partenza, ossia dalla grandezza delle accelerazioni impresse, e queste sono tali in condizioni normali che detta distanza eccede le dimensioni del corpo, e perciò l'onda d'urto non si produce. In altre parole, se noi fossimo alti 20÷30 m l'onda d'urto potrebbe formarsi, nel qual caso noi avremmo una vita media alquanto inferiore a quella attuale; fortunatamente, siamo un poco meno alti, e questo inconveniente non si verifica.

Però in condizioni di insufficienza aortica (la valvola aortica per dilatazione degli orifizi non chiude bene) si produce una corrente di ritorno del sangue dalla aorta nel ventricolo, che non è trascurabile, per compensare la quale è necessaria una più grande portata eiettata, e ad essa corrisponde una accelerazione impressa al sangue alquanto più elevata. In questa situazione la distanza della sezione d'urto dal cuore è minore, e l'onda d'urto può formarsi. Questo secondo la teoria, che peraltro appare essere in accordo con l'esperienza, in quanto in persone affette da insufficienza aortica è stato clinicamente osservato il cosiddetto fenomeno del *colpo di pistola* (pistol shot), che si manifesta con un violento battito che può piegare le dita che palpano l'arteria radiale o femorale; la stessa denominazione di *pistol shot* deriva dal rumore schioccante che si sente allo stetoscopio. In effetto, come l'onda d'urto nella corrente supersonica produce vibrazioni acustiche, il *bang* cui prima ho fatto cenno, così l'aumento rapido della pressione del sangue a valori relativamente notevoli nel fenomeno ora indicato, induce vibrazioni nelle pareti elastiche dell'arteria, la cui frequenza può appartenere all'intervallo delle frequenze udibili. Un altro problema di notevole interesse, e che è pure legato da una interazione tra corrente fluida e deformabilità della parete del condotto della corrente stessa, è quello connesso alla generazione e propagazione nelle arterie del cosidetto *suono* (*o rumore*) *di Korotkow* [11]. Tutti sanno come viene misurata ordinariamente dai medici la pressione del sangue dei loro pazienti; l'apparecchio e la tecnica usati nelle loro linee generali sono quelli introdotti nel 1896 dal Prof. Riva-Rocci, che si laureò in medicina nell'Università di Torino, fu allievo di Forlanini, e che seguì quindi Forlanini a Pavia. Una fascia con cuffia, o camera d'aria gonfiabile, è disposta intorno al braccio, e in detta camera viene soffiata

aria fino a raggiungere una pressione sufficientemente elevata da occludere o quasi l'arteria branchiale. Se si diminuisce quindi lentamente la pressione nella cuffia ad una velocità di circa 5 mm di mercurio al secondo, ad un certo istante si sente allo stetoscopio un caretteristico rumore, o suono, che è chiamato *primo suono di Korotkow*. A mano a mano che la pressione diminuisce, il suono diventa più alto ed esteso nel tempo, raggiunge un massimo di intensità e quindi diminuisce fino a scomparire; ad una pressione appena inferiore a quella in cui il suono comincia a diminuire, esso cambia di tono, perde la sua qualità di *suono staccato* e diventa smorzato (*ultimo suono di Korotkow*). I medici prendono la pressione alla quale appare il 1º suono di Korotkow come misura, o indice, della pressione sistolica, o pressione massima, mentre per la pressione diastolica, o minima, alcuni fisiologi raccomandano di prendere la pressione alla quale appare l'ultimo suono di Korotkow, ed altri quella a cui ogni rumore scompare.

Il problema della generazione e propagazione dei suoni di Korotkow ha appassionato numerosi Cultori della meccanica applicata, che peraltro non lo hanno risolto, ed in effetto per avere una soluzione soddisfacente sarebbe necessario conoscere meglio di quanto oggi si conosca le proprietà elastiche e viscoelastiche dei vasi sanguiferi e dei tessuti che li circondano, nonchè dei vincoli che li collegano, mentre non c'è dubbio che sarebbe necessaria una stretta collaborazione di meccanici e fisiologi capaci di intendersi. Quello che per ora si può dire [12], almeno da un punto di vista qualitativo, è che il fenomeno è la manifestazione di oscillazioni autoeccitantisi, che cioè si producono e si mantengono senza dispendio di energia esterna, e sono la conseguenza di una instabilità di tipo idroelastico, e pertanto, sotto questo aspetto, analoga a quella che è la base del fenomeno del *flutter* in aeronautica. Da questo a ricavare le pressioni critiche alle quali il fenomeno si produce, e porre dette pressioni critiche in relazione diretta e univoca colle pressioni massima e minima, indipendentemente da ogni altra grandezza variabile da persona a persona, il passo è lungo; non per niente il biofisico Alan Burton dice: *più uno cerca di approfondire la conoscenza della base fisica del metodo Riva-Rocci per la misura delle pressioni arteriali, meno fiducia ha nella sua precisione* [9]. Questo non vuol dire che il metodo non vada bene; gli ingegneri conoscono già il miracolo di De Saint Venant, possono benissimo ammettere il miracolo di Riva-Rocci, e del resto Wedekind diceva che essere logici è bene, ma l'essere troppo logici è insopportabile.

Se per lo studio dei fenomeni di propagazione la conoscenza delle proprietà reologiche del sangue non è di importanza essenziale, lo è invece per la determinazione più completa e precisa delle leggi di variazione della velocità del fluido, in particolare delle velocità di scorrimento e delle tensioni tangenziali corrispondenti nei vasi sanguiferi. Siffatta determinazione d'altra

parte è necessaria e perché permette di indagare le ragioni per le quali fenomeni patologici possono prodursi, e perché consente di comprendere il complesso meccanismo col quale viene portata la vita alle cellule che costituiscono l'organismo, e le cause che lo possono inceppare.

Così ad esempio è problema di vitale importanza, nel senso letterale della parola, quello dell'insorgere dell'ateroma, cioè della formazione di placche nella parete interna delle arterie, che dà luogo a perdita di elasticità e conseguente indurimento delle arterie stesse, e quindi arteriosclerosi. Questo fenomeno non è certamente dovuto soltanto a cause idrodinamiche, ma indubbiamente è influenzato da fenomeni idrodinamici. A questo riguardo si deve dire che esistono due tendenze opposte [13]; l'una ritiene che velocità di scorrimento elevate danneggino l'epitelio ed aumentino la permeabilità dei tessuti ai lipidi e grassi, e pertanto localizza le possibili sedi dell'ateroma nelle regioni di più grande tensione tangenziale; l'altra ravvisa nelle zone di più piccola velocità di scorrimento, e quindi anche di trasporto di particelle solide, quelle nelle quali è favorito l'accumularsi di sostanze aterogenetiche, come il colesterolo, e pertanto ritiene dette regioni quelle preferite per l'ateroma. È questa una controversia che non possono ovviamente i fluidodinamici, da soli, dirimere: quello che a me pare è che l'una e l'altra delle due cause alle quali o l'una o l'altra delle due tendenze attribuiscono l'insorgere dell'ateroma, ossia l'aumento di sostanze aterogenetiche a contatto dell'epitelio, ed il danneggiamento di questo sussistono contemporaneamente là dove si ha separazione di flusso, e questo può avvenire per svariate ragioni in corrispondenza delle diramazioni delle grandi arterie. In effetto, nelle regioni di separazione si ha formazione di vortici relativamente grossi, che continuamente riforniscono le pareti dei vasi di sostanze aterogenetiche (se queste sono presenti), e ve le mantengono a contatto, vortici peraltro che non sono stazionari ma periodicamente si formano e si disfano o sono trasportati via dalla corrente esterna. Essi determinano perciò sulle pareti stesse tensioni periodiche, che sono le più efficaci per danneggiare l'epitelio: non c'è dubbio infatti che anche i tessuti organici, come gli altri materiali con cui ha a che fare l'ingegnere, si deteriorano per fatica, ossia in seguito all'applicazione di sollecitazioni alterne ripetute, anche per valori piccoli delle sollecitazioni stesse. Comunque, quello che è importante osservare è che entrambe le teorie, cui prima ho fatto cenno, fanno apparire, sia pure da punti di vista opposti, quanto importante sia la determinazione il più possibile corretta della legge di variazione della velocità nel sistema circolatorio, e pertanto, in primo luogo, delle proprietà delle correnti sanguigne.

Su queste proprietà hanno fondamentale influenza le particelle in sospensione nel plasma, ed essenzialmente i globuli rossi, che da soli occupano il 40% del volume dell'intero sangue, in condizioni normali, tale

percentuale potendo salire al 75% in certe malattie del cuore e dei polmoni, o scendere al 10% nel caso di emorragie acute.

Ora, è il globulo rosso l'oggetto misterioso del sistema circolatorio: in effetto, quasi tutte le proprietà che sono necessarie all'idrodinamico per determinarne la configurazione e il comportamento nelle svariatissime condizioni di lavoro a cui è sottoposto sono incognite.

Qulcosa sappiamo: così sappiamo che nell'uomo il globulo rosso è una cellula senza nucleo, delimitata da una membrana contenente nel suo interno un liquido di viscosità alquanto superiore e densità di poco superiore a quelle del plasma; è cioè un guscio a pareti sottili ripieno di liquido [14]. In condizioni stazionarie ha la forma di un disco biconcavo, più precisamente, per i matematici dirò che ha la forma di un disco rotondo la cui linea meridiana si può considerare una ovale di Cassini, e per i non matematici che detta forma è quella di una ruota di automobile. Ovviamente tale disco è molto più piccolo: il suo diametro è di circa 8 μ, mentre i suoi spessori massimo e minimo sono di circa 2,5 e 1 μ. Il perché la cellula sia senza nucleo e la sua forma biconcava non sappiamo; sappiamo che quando la cellula nasce nel midollo osseo il nucleo esiste; questo viene perduto strada facendo, e non esiste più quando la cellula è immessa nella circolazione. Per quanto si riferisce alla forma, da alcuni è detto che essa è quella corrispondente al minimo dell'energia superficiale. Poiché però ignoriamo quali siano le caratteristiche elastiche e viscoelastiche del guscio, quale sia la sua struttura, quale la legge di variazione del suo spessore, di quale natura siano le forze da cui è sollecitato, una tale affermazione non è di molta utilità. Certo, come fu osservato da Fung [14] una tale forma conferisce al globulo rosso la capacità di deformarsi in una grande varietà di modi senza indurre nella membrana alcuna tensione. È questa capacità che permette al globulo rosso e di sopportare senza rompersi le fortissime accelerazioni nella valvola aortica durante la sistole (fino a 5 g), così che si trova quasi nelle stesse condizioni di un razzo pieno di liquido nella fase di decollo, e gli permette pure di penetrare con facilità, lui che ha un diametro di 8 μ, in capillari del diametro di 4 μ, passando dalla forma discoide a quella di una paraboloide cavo, come quella di un paracadute. Certo una deformazione così notevole produce tensione nella membrana, e la massima tensione sopportabile appare essere tanto più piccola quanto più a lungo essa è applicata. Quello poi che è significativo è che se il globulo non si presenta nella sezione di ingresso del capillare nella giusta orientazione, esso subito ruota per disporsi nella configurazione corretta, così come appare pure significativo, rispetto alla facilità di circolazione del sangue nei capillari di diametro anche inferiore a quello dei globuli, che Fähreus e Lindqvist abbiano constatato che i loro viscosimetri di vetro a tubo capillare diventavano invece completamente ostruiti, intasati (il sangue cioè non

passava) quando ancora il diametro del capillare era cinque volte più grande di quello del globulo.

Naturalmente anche i globuli rossi possono ammalarsi, nel qual caso diventano più rigidi e tendono a conservare la forma di disco biconcavo: ma in queste condizioni sono sufficienti sollecitazioni relativamente piccole per produrre la rottura della membrana, con fuoriuscita della emoglobina Che questo avvenga non sorprende il meccanico: l'equazione differenziale alle derivate parziali che permette di ottenere la tensione in un guscio sottile è di tipo ellittico se la curvatura Gaussiana della superficie del guscio è positiva, è di tipo iperbolico se la curvatura è negativa. Ora, nel caso della forma biconcava semplici considerazioni geometriche mostrano che si ha una regione a curvatura Gaussiana positiva e una a curvatura negativa, separate da una linea sulla quale la curvatura stessa è nulla. L'equazione differenziale è pertanto del tipo misto, così come avviene in aerodinamica per i regimi transonici; ora è ben noto agli aerodinamici quali diavolerie si producano nel flusso non appena questo diventa transonico, e pertanto è logico attendersi che fenomeni sgradevoli avvengano anche nel problema ora in esame, per quanto in questo manchino i tranelli della non linearità incombenti invece nel problema transonico. Ritornando all'aspetto più propriamente reologico, due sono i fenomeni sperimentalmente osservati che attirano l'attenzione dei fluidodinamici: l'uno è lo spostamento radiale dei globuli rossi dalla parete verso l'asse nelle arterie, arteriole, vene e venule, in conseguenza del quale si forma uno strato di plasma adiacente alle pareti stesse del tutto privo di globuli rossi. È questo un fenomeno che fu già scoperto da Malpighi circa tre secoli fa e che è del tutto analogo a quello riscoperto recentemente in idrodinamica e ribattezzato come *tubular pinch effect*, o effetto *Segré-Silberberg* [15], nel quale per flussi entro condotti tubolari contenenti particelle solide in sospensione, queste particelle emigrano lateralmente sia dalla parete sia dall'asse del tubo tenendo a concentrarsi in un anello tra l'asse e la parete a circa 6/10 del raggio del condotto dall'asse. Questo effetto per le particelle rigide appare essere dovuto alle forze di inerzia, e pertanto si produce a numeri di Reynolds sufficientemente elevati; se però le particelle sono deformabili, esse emigrano solo dalla parete verso l'asse, e tale spostamento compiono qualunque sia il numero di Reynolds. Per effetto del fenomeno ora indicato, poichè il plasma ha una resistenza al flusso, a parità di velocità, alquanto minore di quella del sangue (ossia plasma+particella in sospensione), ne deriva una resistenza più piccola, e tanto più piccola quanto minore è il raggio del vaso; più precisamente, definendo viscosità apparente il rapporto tra la tensione tangenziale e la velocità di scorrimento corrispondente, si ha che la viscosità apparente del sangue diminuisce rapidamente col diminuire del diametro

del vaso, almeno per valori di questi inferiori a un dato limite. È questo l'effetto noto come *effetto Fähreus-Lindqvist* [16].

Il secondo fenomeno è quello della tendenza dei globuli rossi a riunirsi formando aggregati lineari di più individui, che si separano solo quando la velocità di scorrimento del flusso è superiore ad un dato limite, (*viscosity plus effect*) [17], e a questo comportamento corrisponde una diminuzione della viscosità apparente col crescere della velocità di deformazione.

Entrambe le variazioni della viscosità apparente corrispondente ai fenomeni indicati mettono bene in evidenza che il sangue non è un fluido Newtoniano, per il quale la viscosità, definita nel modo prima detto, è una grandezza fisica propria di ogni sostanza, e dipendente quindi solo dalle grandezze che definiscono lo stato fisico della sostanza stessa. È necessario perciò premettere allo studio di ogni corrente sanguigna la determinazione dell'equazione costitutiva del sangue, che definisce la dipendenza dello stato di tensione, che in questo si produce in conseguenza del moto, dalle grandezze cinematiche tipiche del moto stesso. Da parecchi è stata assunta come equazione costitutiva quella di Casson [18], che fu stabilita da Casson sperimentando su fluidi costituiti da inchiostro di stampa, e che va pure bene, per esempio, per il cioccolato fuso. Essa, in verità, rappresenta abbastanza bene le proprietà reologiche del sangue nel movimento laminare entro condotti per un ampio intervallo della velocità di scorrimento; in particolare, essa contiene un termine che ha il significato di tensione di snervamento, ossia di tensione per velocità di scorrimento nulla, e la cui esistenza è tipica più per le sostanze solide che per quelle fluide.

D'altra parte esperimenti molti accurati di Copley ed altri hanno confermato l'esistenza di una tale tensione, di guisa che si può affermare che il sangue fermo si comporta come un solido. È appena il caso di osservare che la conoscenza delle proprietà del sangue nelle condizioni ora dette è di fondamentale importanza nelle rianimazione di un paziente in stato di profondo shock, o di arresto cardiaco, e per la protezione e la conservazione degli organi di trapianto, quando appunto il flusso sanguigno è nullo. L'equazione di Casson non dà però, e non può dare spiegazione della esistenza dello strato periferico privo di globuli rossi nei vasi sanguigni. Risultati molto più soddisfacenti al riguardo si ottengono rappresentando il sangue, come oggi si dice, come un *mezzo continuo strutturato* secondo il modello matematico originariamente proposto dai Cosserat e trattato poi rigorosamente da Truesdell ed Ericksen [19]. Hanno seguito questo ordine di idee Popel, Regirer e Usick nel 1974 [20] nell'Unione Sovietica; Kline, Allen e De Silva negli Stati Uniti nel 1968 [21].

Non è il caso ora che faccia cenno a queste teorie; mi limiterò ad osservare che in esse i glubuli rossi appaiono come girostati elementari che tendono a conservare la propria rotazione, la quale potrà quindi risultare diversa

dal rotore della velocità media; il tensore delle tensioni risulta perciò asimmetrico, e le equazioni che si ricavano vengono, sotto questo aspetto, a risultare formalmente analoghe a quella ottenute da Gian Domenico Mattioli nel 1937 [22], nella sua teoria sulla turbolenza, teoria che fu allora aspramente criticata da insigni aerodinamici come Prandtl e Von Kármán, ma che va, o dovrebbe andare, sempre più affermandosi.

I risultati ottenuti dagli Autori sopra citati sono molto promettenti, e danno ragione sia dell'effetto Fähreus-Lindqvist, sia dell'effetto Segré-Silberberg, sia della variazione della viscosità apparente colla frequenza nel flusso pulsante.

In questo modello è tenuto conto solo dell'influenza dei globuli rossi sulle proprietà reologiche; in effetto, l'influenza dei globuli bianchi è minima in condizioni normali. Essa però può diventare notevole nel caso di gravi infezioni, nelle quali è stato constatato che i globuli bianchi tendono ad aderire fortemente alle pareti fino a formare un rivestimento molto irregolare, che riduce la sezione di passaggio del fluido fino a un terzo del suo valore. In questa situazione un modello accettabile del flusso nelle arterie [5] si ottiene immaginando di incollare fiori di pisello da giardino sulla parete interna di un tubo di 25 mm di diametro, nel quale scorre una sospensione di piselli soffici, flessibili nella concentrazione del 50% in un liquido sciropposo. Che la resistenza al deflusso in questo caso sia grande è facile a capirsi, così come è facile a comprendere che una determinazione quantitativa del flusso stesso nessuno abbia finora tentato di farla.

Ovviamente, anche nella situazione normale, non patologica, la teoria basata sul modello continuo strutturato del sangue non è più valida quando il diametro del condotto scende a valori così piccoli come quelli dei capillari. Ma, avvicinandoci a questi, i globuli rossi che in ogni sezione retta delle arteriole si contavano ancora a decine, in moto più o meno disordinato, a mano a mano si dispongono ordinatamente come disciplinati soldatini a formare una sola fila pronti a entrare nei capillari, di guisa che nel flusso in questi le due fasi, plasma e globuli, sono nettamente separate. In queste condizioni fare un modello matematico del flusso è relativamente semplice, almeno in apparenza, perchè il problema si può pensare ridotto a quella di una fila di particelle uguali, a uguale distanza l'una dall'altra, mobili entro un condotto ripieno di liquido; e poiché le dimensioni del condotto sono dell'ordine di pochi micron, e di conseguenza pure tale è l'ordine di grandezza dello spessore dell'intercapedine tra ogni singola particella e la parete del capillare, per la determinazione di tale moto si possono usare invece che le equazioni di Stokes-Navier, non lineari, le equazioni di Reynolds, lineari, le equazioni cioè della teoria della lubrificazione, che l'ingegnere applica per lo studio dei cuscinetti portanti e spingenti degli alberi rotanti. C'è però una difficoltà fondamentale: l'ingegnere ha imparato a tener conto delle deformazioni

che perno e cuscinetto subiscono in conseguenza delle forze ad essi trasmesse dal lubrificante, ma egli ha a che fare con materiali di cui conosce le caratteristiche elastiche, e se non le conosce, sa come ottenerle. Nel problema ora in esame egli invece ignora tutto, o quasi tutto, sulla struttura e sulle caratteristiche superficiali dei globuli rossi e dell'endotelio, e non ha modo quindi di determinare la forma che il globulo assume per una data distribuzione di forze al contorno. D'altra parte è tale configurazione che dà la legge di variazione dello spessore dell'intercapedine tra globuli e parete del capillare (il *meato* della teoria della lubrificazione).

Il problema si complica ulteriormente perché è nei capillari che si compie il trasferimento di materia e di energia dai globuli rossi ai tessuti organici e viceversa. Le pareti debbono perciò essere permeabili per lo meno a date sostanze, e lo studio non può limitarsi a considerare il flusso nel capillare, ma deve tener conto contemporaneamente del flusso attraverso il capillare nel tessuto circostante; il primo è retto dalle equazioni di Reynolds, che sono del secondo ordine, il secondo, schematizzando i tessuti come mezzi porosi, è retto dalle equazioni di Darcy, che sono del primo ordine, il che rende non semplice la definizione delle condizioni al contorno. Per questo complesso di ragioni le ricerche eseguite al riguardo fino ad ora, e fra queste quelle del Premio Panetti Lighthill [23] e di Fitzgerald [24], sono senza dubbio di grande importanza ed interesse, ma non possono essere considerate che un primo tentativo di soluzione del complesso problema.

Ma non posso e non voglio entrare maggiormente nei dettagli, né ho la possibilità di far cenno delle altre numerosissime applicazioni della fluidodinamica alla biologia e viceversa. Sarebbe, oltre a tutto, oltremodo spiacevole che io, proprio parlando della circolazione del sangue, dovessi essere la causa di qualche disturbo circolatorio per eccessivo affaticamento di qualcuno dei gentili ascoltatori.

D'altra parte da quanto ho detto mi sembra si possano già dedurre due conclusioni. L'una è che per lo studio dei problemi che la Biologia pone all'Ingegneria e alla Fisica è necessaria la più stretta collaborazione tra Biologi, Fisici e Ingegneri, e nessuna sede perciò si presta meglio per detto studio di una Accademia, che per la sua formazione composita possiede tutte le competenze necessarie, e questo dà un'ulteriore giustificazione della scelta dell'argomento, che mi sono permesso trattare in questa occasione.

La seconda conclusione riguarda la estrema difficoltà dei problemi stessi: d'altra parte, nessuna opera dell'uomo, né l'astronave più grandiosa, né il calcolatore più prodigioso, è così complessa come l'organismo umano. Questo richiede da parte di chi si accosta a questi problemi la massima pazienza e la più grande umiltà; pazienza, e quindi disposizione al lavoro continuo, assiduo, senza pretesa che questo porti al risultato, tutto e subito; umiltà, che non è reverente sottomissione o aprioristica rinuncia, ma conoscenza

dei propri limiti, consapevolezza che più uno sa, più ha bisogno di imparare, coscienza che è grazie all'apporto, sia pure piccolo, che ciascuno può dare, che progressi notevoli possono essere raggiunti. Sono doti queste pazienza e umiltà, che tendono a diventare sempre più rare, e perciò mi sembra opportuno ricordare, nel centesimo anniversario della nascita del prof. Panetti, le parole che Egli pronunciò nella celebrazione del 25° Anniversario della fondazione del Laboratorio di Aeronautica, da Lui creato, rivolgendosi a noi allora Suoi *giovani* allievi: *al compito di insegnare le vie per trovare soluzioni sempre più perfette dei problemi del volo, il Laboratorio di Torino portò il suo piccolo contributo con opera progressiva, continua, anche se non segnalata da subitanei sbalzi né brillante per improvvisazione.*

È lo spirito che informa queste parole che, a perpetuare l'insegnamento del grande, indimenticabile, caro Maestro, io raccomando agli studiosi giovani, e non più tanto giovani qui presenti, e termino il mio dire ringraziando i gentili ascoltatori e dando loro atto di aver dimostrato di possedere al più alto grado la prima delle virtù che avevo prima indicato, la pazienza.

BIBLIOGRAFIA

[1] Zweifach B. W., « Sci. Am. », vol. 200, 54-60 (1959).
[2] Krogh A., « J. Physiol. », vol. 52, 409-415 (1919).
[3] Jones R. T., « Ann. Rev. Fluid. Mech. », vol. 1, 223-244 (1969).
[4] Johnson P. C., Wayland H., « J. Appl. Phys. », Giugno 1957.
[5] Merril E. W., Wells R. F. Jr., « Appl. Mech. Rev. », vol. 14, n. 9 (Sett. 1961).
[6] Skalak R., « Biomech. », Ed. Y. C. Fung., vol. 6, pag. 200 e segg. (1966).
[7] Frank O., « Zeit. Biol. », vol. 37, pag. 483 (1899).
[8] Noordegraf A., « Biolog. Engin. McGraw-Hill », pag. 391 e segg. (1969).
[9] Fung Y. C., « Appl. Mech. Rev. », vol. 21, n° 1 (Genn. 1968).
[10] Anliker M., Rockwell R., Ogden E., « AGARD Conf. Proceed. », n. 65.
[11] Mc Cutcheon E. P., Rushmer R. F., « Circul. Res. », vol. 20, 149-161 (1967).
[12] Lighthill J. M., « J. Fluid Mech. », vol. 52, part. 3, 475-497 (1972).
[13] Caro C. G., Fitz-Gerald J. M., R. C. Schroten., « AGARD Conf. Preceed. », n. 65.
[14] Fung Y. C., « Biom. Sci. Instrum. », vol. 4, pag. 310 e segg. (1968).
[15] Segré G., Silberberg A., « Nature », vol. 189, pag. 209 (1961).
[16] Fahraeus R., Lindqvist T., « Amer. J. Phys. », vol. 96, pag. 562 (1931).
[17] Rosenblum W. L., « Nature », vol. 221, pag. 365 (Genn. 1969).
[18] Casson N., « Rheology of disperse Systems », (ed. Mill, C. C.) p. 84, Pergamon Press (1959).
[19] Ericksen J. L., Truesdell C., « Arch. Rat. Mech. Anal. », vol. 1, 295 (1958).
[20] Popel A. S., Regirer S. A., Usick P. I., « Biorheology », vol. 11, n. 6, 427-437 (1974).
[21] Kline K. A., Allen S. J., De Silba C. N., « Biorheology », vol. 5, n. 2, 111-118 (1968).
[22] Mattioli G. D., « Atti R. Accad. Naz. Lincei », vol. XVII, p. 217 (1933).
[23] Lighthill J. M., « J. Fluid. Mech. », vol. 34, pag. 13 e segg. (1968).
[24] Fitz-Gerald M. J., « Proc. Roy. Soc. London B », vol. 174, 193-222 (1969).



CESARE CODEGONE (*)

Problemi di termomeccanica di fluidi bifasi.

Summary. — *The thermomechanical problems of heat and mass transfer in film condensation and film evaporation on vertical plane surfaces are analytically examined either for laminar or for turbulent motion.*

1. — Condensazione pellicolare laminare.

Nel caso di parete piana verticale, limitante ampio spazio occupato da vapore saturo puro in quiete, a pressione e quindi a temperatura costante, si segue qui, con qualche modificazione, la teoria del Nusselt [1].

Detti (v. fig. 1): z la coordinata verticale contata dalla sommità della parete, y quella ortogonale alla parete stessa, μ, ϱ, u rispettivamente la viscosità, la densità massica e la velocità di discesa del liquido condensato, ϱ_v la densità massica del vapore, g l'accelerazione di gravità, l'equazione dell'equilibrio dinamico dell'elemento di volume $(dz \cdot dy \cdot 1)$ del liquido si scrive:

$$- \mu \frac{d^2u}{dy^2} = g(\varrho - \varrho_v) \tag{1}$$

Ammettendo, per le ipotesi fatte, che sia nulla la velocità a contatto della parete, che nell'interfaccia liquido-vapore, ove si ritiene trascurabile l'attrito col vapore, sia pure nulla la (du/dy), e che, data l'esiguità delle differenze di temperatura in giuoco, siano trascurabili le variazioni di μ e di ϱ, si ha subito per la velocità locale l'espressione:

$$u = \frac{g}{2\mu} (\varrho - \varrho_v) y^2 \tag{2}$$

e per la velocità media $\bar{u}$ nello strato liquido di spessore δ l'espressione:

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u dy = \frac{g}{3\mu} (\varrho - \varrho_v) \delta^2 \tag{3}$$

(*) Politecnico di Torino.

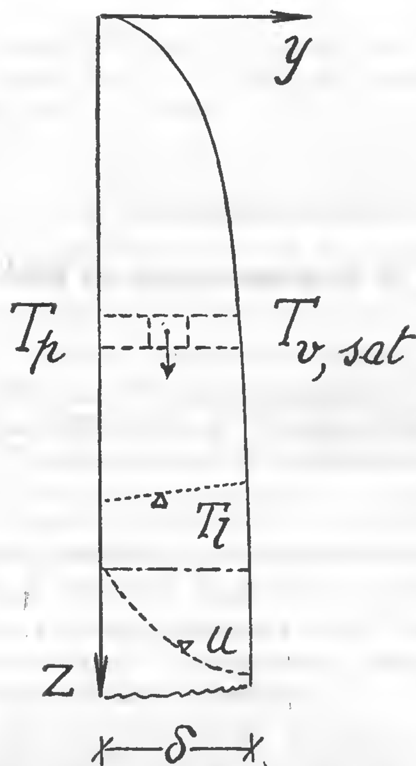


Fig. 1.

Trascurando il piccolo salto termico all'interfaccia vapore liquido, e ritenendo che la propagazione termica avvenga per sola conduzione, l'equazione del bilancio di calore e di massa nello strato orizzontale $(dz \cdot \delta \cdot 1)$, fra le temperature costanti T_v del vapore saturo e T_p della parete, può scriversi:

$$k \frac{T_v - T_p}{\delta} dz \cdot 1 = r^* \cdot dM = d\Phi \tag{4}$$

in cui k è il coefficiente di conduzione termica del liquido, dM è la massa condensata nell'unità di tempo sull'area $(dz \cdot 1)$, r^* è la presunta variazione di entalpia del vapore che si condensa:

$$r^* = r + \frac{1}{2} c(T_v - T_p) \tag{5}$$

Nella (5) r è il calore di condensazione, c il calore specifico massico del liquido.

Dalla (4) emerge che il flusso termico Φ non è uniformemente distribuito sulla parete, poiché varia sulla stessa la resistenza termica opposta dallo strato liquido di spessore δ.

Questo liquido assume nello strato stesso una temperatura intermedia fra T_v e T_p, temperatura che qui, in via di approssimazione, è stata posta uguale alla media aritmetica fra le due estreme.

La portata massica di liquido discendente in corrispondenza dell'ordinata z, e sempre per un'ampiezza unitaria di parete, vale:

$$M = \varrho \bar{u} \delta \cdot 1 = \frac{g\varrho(\varrho - \varrho_v)}{3\mu} \delta^3 \tag{6}$$

e pertanto:

$$dM = \frac{g\varrho(\varrho - \varrho_v)}{\mu} \delta^2 \cdot d\delta \tag{7}$$

Poiché quest'incremento di portata è appunto dovuto alla condensazione sull'areola $dz \cdot 1$, confrontando la (4) con la (7), ricordando che M è nullo in sommità e integrando si ottiene per lo spessore δ dello strato liquido in corrispondenza della quota z, l'espressione:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\mu k(T_v - T_p)z}{gr^*\varrho(\varrho - \varrho_v)}} \tag{8}$$

che per il vapor d'acqua, nei casi ordinari, dà luogo a valori dell'ordine di grandezza di frazioni di millimetro.

Tenendo conto della (3) si vede facilmente che δ risulta proporzionale a $\sqrt{z/\bar{u}}$, espressione che presenta qualche analogia con quella dello spessore dello strato limite laminare generato da una corrente fluida scorrente su una lastra piana ad essa parallela.

Dalla (4), tenendo conto della (8) e integrando rispetto a z, si può ottenere l'espressione del flusso Φ_z trasmesso dall'area frontale $z \cdot 1$.

Il valor medio $\bar{h}$ del coefficiente di scambio termico relativo alla stessa area frontale vale quindi:

$$\bar{h} = \frac{\Phi_z}{(T_v - T_p)z} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{gr^*\varrho(\varrho - \varrho_v)k^3}{4\mu(T_v - T_p)z}} \tag{9}$$

Dalla (9) si ricava poi facilmente il numero del Nusselt N_{Nu} che vale $(\bar{h}z/k)$.

I risultati della teoria sono applicabili a vari fluidi in varie condizioni di temperatura e di pressione e possono essere estese anche a superfici curve a generatrici verticali di moderata curvatura, non richiedendosi altro che la conoscenza dei necessari dati del problema (altezza e temperature) e di grandezze termodinamiche e termocinetiche ricavabili in laboratorio e del resto già note per numerosi fluidi.

I risultati sperimentali sono sempre non poco dispersi, non soltanto

per le difficoltà che si incontrano in tali indagini, ma altresì perché variano in modo difficilmente valutabile la natura e lo stato delle superfici condensanti. Tali risultati danno luogo a valori alquanto più elevati dei valori teorici, in dipendenza anche delle ricordate ipotesi semplificative, e tuttavia il loro andamento conferma pienamente quello teorico.

È poi possibile tener conto teoricamente di velocità finite del vapore ed è altresì possibile adattare la teoria ai calcoli relativi all'estradosso di tubi cilindrici disposti con asse orizzontale.

In questo caso si giunge ad una espressione del coefficiente medio di scambio termico $\bar{h}$, analoga a quella indicata dalla (9), in cui però il diametro dei tubi sostituisce l'altezza z ed il fattore 4/3 si riduce praticamente all'unità.

2. — Condensazione pellicolare turbolenta.

Il fenomeno prima esaminato si complica coll'accrescimento dell'altezza della parete, e precisamente quando, col progressivo ispessimento e corrugamento della pellicola liquida, allo strato in moto laminare si sovrappone, nascendo ad una certa distanza dalla sommità, uno strato in moto turbolento, (v. fig. 2) con un andamento in qualche modo analogo a ciò

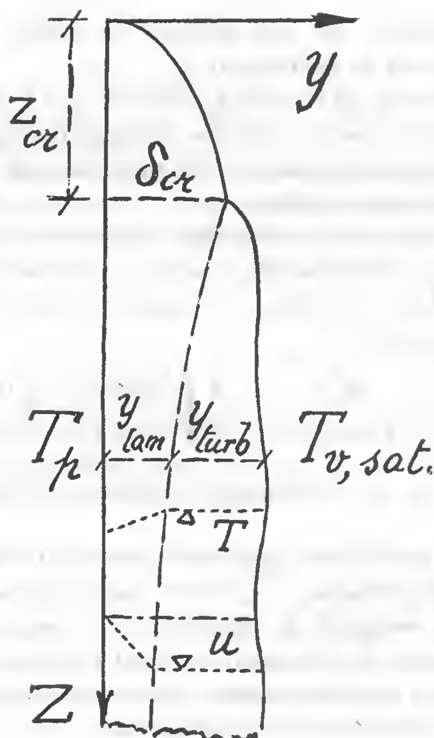


Fig. 2.

che avviene nel già ricordato fenomeno aerodinamico di una lastra piana investita da una corrente fluida parallela ad essa.

Il Grigull [2] nel trattare questo caso, ha combinato la teoria dello strato luminare del Nusselt con l'analogia del Prandtl che lega il trasferimento di calore con la caduta di pressione nel moto turbolento [3].

Si giunge per tal modo a stabilire per il flusso termico locale Φ, riferito all'unità di area frontale, l'espressione:

$$\Phi = \frac{g\varrho k(T_v - T_p)\,\delta \cdot N_{Pr}}{\mu[\bar{u} + u_0(N_{Pr} - 1)]} \tag{10}$$

in cui u_0 è la velocità del liquido all'orlo del substrato laminare e il numero del Prandtl N_{Pr}, pari a $(c\mu/k)$ è calcolato per la temperatura media del liquido.

Il coefficiente medio $\bar{h}$ di scambio termico vale semplicemente $[\Phi/(T_v - T_p)]$.

Anche qui si può ripetere l'osservazione già fatta in precedenza e riguardante la non uniforme distribuzione del flusso termico sulla superficie condensante.

Mettendo in evidenza grandezze adimensionali la (10) può porsi altresì sotto la forma:

$$N_{Nu} = \frac{g\delta \cdot N_{Pr} \cdot N_{Re}}{\bar{u}[\bar{u} + \bar{u}_0(N_{Pr} - 1)]} \tag{11}$$

in cui i valori locali del numero del Nusselt, pari a $(h\delta/k)$, e del Reynolds, espresso da $(\varrho\bar{u}\delta/\mu)$, sono riferiti allo spessore δ dello strato, assunto quale dimensione lineare caratteristica del fenomeno in esame.

Le determinazioni ulteriori si fondano su varie altre ipotesi.

In particolare si suppone che nello strato turbolento la velocità varii secondo la regola di von Kármán, detta della radice settima, che per il coefficiente di attrito turbolento si adotti la formula monomia del Blasius, e ancora che la resistenza opposta dallo stesso attrito turbolento sia proporzionale a $\varrho\bar{u}^2/2$.

La velocità media $\bar{u}$ risulta per tal modo proporzionale a:

$$\left(\frac{\varrho g^4 \cdot \delta^5}{\mu}\right)^{1/7} \tag{12}$$

L'equazione dello scambio termico e di massa è analoga a quella indicata nel paragrafo precedente:

$$r^* \left[\frac{d(\varrho\bar{u}\delta)}{dy}\right] = h(T_v - T_p) \tag{13}$$

Da queste premesse si ricava che il moto turbolento nasce ad una distanza z_{cr} dalla sommità, proporzionale a:

$$Z_{cr} = \frac{1}{3k(T_v - T_p)} \left[\frac{g^2 \mu^5 (N_{Re})^4_{cr}}{\varrho^2} \right]^{1/3} \tag{14}$$

essendo:

$$\delta_{cr} = \left[\frac{3\mu^2 (N_{Re})_{cr}}{g\varrho^2} \right]^{1/3} \tag{15}$$

Il numero di Reynolds critico, in corrispondenza del quale appare il regime turbolento, può essere stimato intorno a 350.

L'ottenimento della relazione che lega z a δ nella zona turbolenta è piuttosto laborioso, ma consente di eseguire le necessarie integrazioni.

Assunto il seguente numero di Reynolds laminare, che è fittizio al disopra del valore critico ed è calcolato per l'altezza totale della parete:

$$(N_{Re.\,lam})^{4/3} = \frac{k(T_v - T_p) Z \varrho^{2/3}}{1{,}082\, g^{2/3} \mu^{5/3} r^*} \tag{16}$$

e posto $\Psi = \delta/\delta_{cr}$ si ottiene la seguente equazione in termini adimensionali che risolve il problema:

$$\begin{cases} \Psi^{10/7} + 1{,}132 \dfrac{N_{Pr} - 1}{(N_{Re})^{1/4}_{cr}} (\Psi^{17/7} - 1) - 1 = \\ = \dfrac{(N_{Re})^{6/7}_{cr} \cdot N_{Pr}}{183{,}4} \left[\left(\dfrac{N_{Re.\,lam}}{N_{Re.\,cr}} \right)^{4/3} - 1 \right] \end{cases} \tag{17}$$

Il coefficiente medio $\bar{h}$ di scambio termico per parete piana verticale di altezza Z è espresso da:

$$\bar{h} = \frac{g\varrho\bar{u}r^*\delta}{(T_v - T_p)Z} \tag{18}$$

e compiuti i necessari sviluppi risulta proporzionale a $[Z(T_v - T_p)]^{1/2}$.

Esso è quindi, a partire dalla zona critica, crescente con la radice quadrata dell'altezza, mentre nel caso di regime laminare risultava, come si è visto, decrescente con la radice quarta della medesima altezza (v. fig. 3).

Al crescere dell'altezza Z la superficie dello strato turbolento acquista delle ondulazioni di ampiezza via via crescente, fino a dar luogo a instabilità dinamica e al distacco di falde liquide.

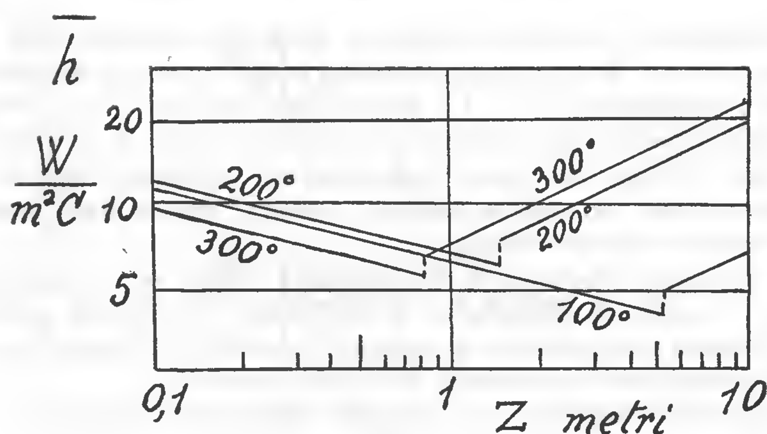


Fig. 3.

3. — Evaporazione pellicolare laminare.

Anche l'evaporazione, in condizioni particolari di superficie e di regime termico, può avvenire in strati sottili aderenti alle pareti riscaldanti.

L'analogia col fenomeno di condensazione pellicolare laminare prima esaminato consente di applicare, in circostanze analoghe e con opportune modificazioni, la stessa teoria precedentemente esposta.

Conviene invertire, rispetto a questa, sia il senso dell'asse delle Z, ora da rivolgere, come il vapore in ascesa, verso l'alto, e sia il senso del flusso termico, ora rivolto dalla parete verso il fluido (v. fig. 4).

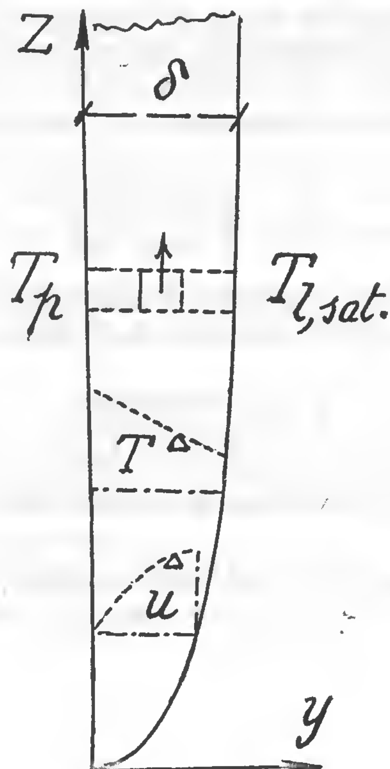


Fig. 4.

Si giunge così a equazioni analoghe a quelle prima indicate, nelle quali le grandezze u, μ, k, ϱ, c, prima relative al liquido, sono ora da riferire al vapore, e la differenza $(T_v - T_p)$ va sostituita con la $(T_p - T_l)$, essendo T_l la temperatura del liquido, supposto saturo e in quiete. È da notare che anche qui il flusso non risulta uniformemente distribuito sulla parete, essendo su di essa variabile la resistenza termica opposta dallo strato di vapore che è a spessore variabile.

Se la massa circostante di liquido non è satura, ma a temperatura inferiore a quella di saturazione, la trattazione diviene più complessa perché bisogna allora ricorrere ai sistemi di equazioni differenziali che reggono la propagazione per convezione termica libera [5].

Ancora più complicato è il caso della convezione forzata [6].

4. — Evaporazione pellicolare turbolenta.

Anche nel caso dell'evaporazione l'esperienza mostra che superati certi limiti di velocità ascensionale del vapore, e quindi del corrispondente numero del Reynolds, la superficie del film si presenta percorsa da ondulazioni in rapida ascesa. Esse rivelano che al sottostrato laminare si sovrappone, in modo che ancora ricorda il fenomeno aerodinamico, uno strato in regime turbolento.

Ciò avviene a qualche distanza dal bordo di inizio dell'evaporazione, che in questo primo tratto corrisponde quindi ancora al regime laminare (v. fig. 5).

In corrispondenza di tale tratto, di lunghezza Z_{cr}, si ritiene valida la teoria approssimata del Bromley [7], che, supposto costante il valore del flusso termico, conduce, con un'analisi simile a quella del Nusselt, ad adottare per lo spessore δ_{cr} di transizione fra i due regimi di moto l'espressione:

$$\delta_{cr} = \sqrt[3]{\frac{2\mu_v^2 (N_{Re})_{cr}}{g\varrho_v(\varrho - \varrho_v)}} \tag{19}$$

in cui ϱ_v è valutato alla temperatura di saturazione ed il numero critico del Reynolds $(N_{Re})_{cr}$, riferito alla stesso δ_{cr}, è stimato intorno a 100.

Si ha ancora:

$$Z_{cr} = \frac{\mu_v r^* \delta_{cr} (N_{Re})_{cr}}{2k_v(T_p - T_{sat})} \tag{20}$$

essendo la somministrazione media r^* di calore al vapore ricavata dall'espressione approssimata:

$$r^* = r\left[1 + \frac{0{,}34\, c_p (T_p - T_{sat})}{r}\right]^2 \tag{21}$$

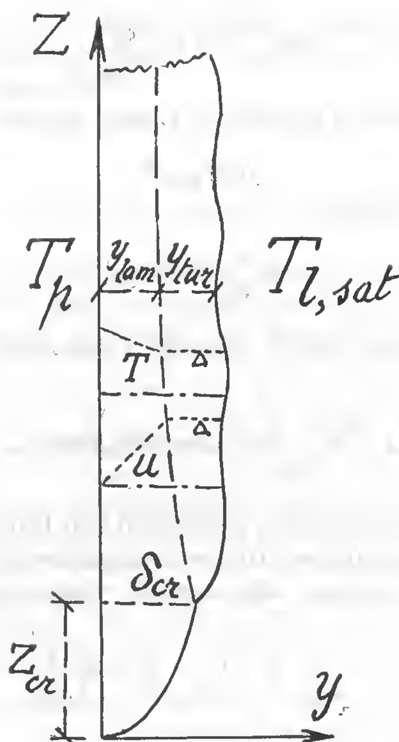


Fig. 5.

ove r è il calore di evaporazione, c_p il calore specifico massico a pressione costante del vapore stesso, T_{sat} la temperatura di saturazione corrispondente alla pressione.

Si supponga ora, seguendo Hsu e Westwater, [8] che lo strato turbolento sia tutto alla temperatura T_{sat} di saturazione e che la resistenza termica sia quindi interamente localizzata nel sottostrato laminare di spessore δ_{lam}, entro cui sia lineare la caduta di temperatura fra la T_p alla parete e la T_{sat}.

In modo analogo al noto schema di Prandtl si supponga che la velocità u sia crescente linearmente nel sottostrato laminare e sia invece costante nel film turbolento.

Si consideri ancora un elemento di volume di tale strato turbolento di altezza dz, di spessore pari a quello medio δ_{turb} dello strato stesso e di area unitaria nella direzione parallela alla parete scaldante.

Nella equazione dell'equilibrio dinamico di tale elemento bisogna tener conto delle seguenti forze:

1) la spinta di Archimede: $A = g\delta_{turb}(\varrho - \varrho_v)$

2) l'attrito contro il sottostrato laminare:

$$\mu_v \frac{du}{dy} = \mu \frac{u_{turb}}{y_{lam}}$$

3) l'attrito contro l'interfaccia vapore liquido:

$$f\varrho_v u^2{}_{turb}/2$$

4) la forza d'inerzia

$$\varrho_v \frac{d}{dz} (\delta u^2)_{turb}$$

Tenuto conto delle ipotesi ammesse l'equazione di bilancio termico si scrive:

$$k_v \frac{T_p - T_{sat}}{y_{lam}} dz = r^* \varrho_v d(\delta u)_{turb} \tag{22}$$

Combinando le due relazioni precedenti con l'equazione dell'equilibrio dinamico dello strato laminare e ritenendo costante la differenza $(T_p - T_{sat})$, si giunge, con alcuni sviluppi, alle seguenti relazioni finali:

$$\left(\frac{1}{\delta_{lam}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\delta_{cr}}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{Z}{D} \tag{23}$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_{Nu} &= \frac{hZ}{k_v} = \frac{2}{3} \frac{\mu_v r^* (N_{Re})_{cr}}{k_v (T_p - T_{sat})} \\ &+ D\left[\frac{2}{3} \frac{Z - Z_{cr}}{D} + \left(\frac{1}{\delta_{cr}}\right)^2\right]^{3/2} - \left(\frac{1}{\delta_{cr}}\right)^3 \end{aligned} \right. \tag{24}$$

in cui:

$$A = \frac{g(\varrho - \varrho_v)}{u_v} \left[\frac{\varrho_v}{\mu_v (N_{Re})_{cr}}\right] \tag{25}$$

$$D = \left(\frac{1}{3} + B\right)/A \tag{26}$$

$$B = 1 + \frac{\mu_v + \frac{1}{2}\left[f\varrho_v u_v (N_{Re})_{cr}\right]}{k_v (T_p - T_{sat})/r^*} \tag{27}$$

Anche in questo caso, come nel precedente, la trattazione della convezione libera e di quella forzata in liquido a temperatura minore di quella di saturazione, divengono notevolmente complesse.

L'accrescimento della velocità ascensionale del film di vapore può dar luogo altresi a instabilità dinamica delle ondulazioni e al successivo distacco da esse di bolle di vapore [9].

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

[1] NUSSELT W., *Zeit. VDI*, 60 (1916) 102; *ibid.*, 60 (1916) 541/569; ROSENHOW W. M., *Trans. ASME*, 78 (1956) 1645. Per esperienze relative alla condensazione si veda: C. CODEGONE, *Politecnico*, n. 10, 1927; *Ric. Scient.*, 19 (1949) n. 1.

[2] GRIGULL V., *Forsch. Arb. Geb. Ing. Wes.*, 13 (1942) 49; *ibid*, 18 (1952) 10; COLBURN A. P., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 30 (1933) 187; *Ind. Eng. Chem.*, 26 (1934) 432; ROSENHOW W. M. e coll., *Trans. ASME*, 78 (1956) 1637. Qualche Autore distingue fra il regime laminare e quello turbolento un regime intermedio, caratterizzato da piccoli corrugamenti superficiali che accrescono l'intensità della trasmissione di calore e di massa ed evitando la brusca fase critica danno luogo a un raccordo fra i due andamenti anzidetti J. Borchmann e coll. hanno proposto del problema una soluzione empirica. Cfr. di tali Autori la nota apparsa su: « Int. Inst. of Refrigeration », Comm. 2, Trondheim, 1966.

[3] PRANDTL L., *Phys. Zeit.*, 11 (1910) 1072; 29 (1928) 487; JAKOB M., *Heat Transfer*, II (1957) 586; P. E. BRUNELLI, C. CODEGONE, *Fisica Tecnica*, Parte II, *Termocinetica*, Torino, 1964, Cap. III.

[4] CUMO M., *Aspetti fondamentali dell'ebollizione*, CNEN, Roma, 1968, p. 313.

[5] NISHIKAWA K., ITO T., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 9 (1966) 103.

[6] NISHIKAWA K., ITO T., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 9 (1966) 117.

[7] BROMLEY L. A., *Chem. Eng. Progr.*, 44 (1952), 2966; *ibid.*, 45 (1953) 2639.

[8] HSU Y. Y., WESTWATER J. W., *Chem. Eng. Progr.*, *Symp. Series*, Sorrs, 1961.

[9] BERENSON P. J., *Journ. of Heat Transfer*, n. 8 (1961) 351; TAYLOR G. I., *Proc. Roy. Soc. London*, A201 (1950) 192.

GIANNI JARRE (*)

Il flusso termico laminare nelle correnti simili.

Summario. — *Si presenta un metodo generale per il calcolo del flusso termico laminare $q_w(x, m, n, \sigma)$ nelle correnti simili; il metodo, rapido ed accurato, risulta valido:*

— *per qualsiasi ascissa x;*

— *per qualsiasi valore di m, cioè del gradiente di pressione, dal caso della estremamente decelerata corrente di separazione al caso della estremamente accelerata corrente di pozzo;*

— *per qualsiasi valore di n, cioè del gradiente di temperatura di parete, incluso il caso dell'inversione termica;*

— *per qualsiasi numero di Prandtl σ, dai valori tendenti a zero dei vapori metallici, ai valori intorno ad uno dei gas, ai valori tendenti ad infinito degli olii.*

La complessa trasduzione del salto di entalpia H in flusso termico q_w è decomposta in quattro operazioni semplici:

— *se H è costante la conducibilità determina l'*ammettenza *alla quale la viscosità applica una* attenuazione*;*

— *se H è variabile la conducibilità determina l'*anticipo *al quale la viscosità sovrappone un* ritardo.

1. — Premesse.

La teoria dello strato limite laminare si propone di determinare i *flussi* di quantità di moto e di calore

$$\tau_w(x) \qquad \text{e} \qquad q_w(x)$$

attraverso la parete lambita dalla corrente fluida, quando siano assegnati i due salti di *potenziale*

$$U(x) = u_e - u_w \qquad \text{e} \qquad H(x) = h_e - h_w \tag{1}$$

(*) Scuola di Ingegneria Aerospaziale del Politecnico di Torino.

Con riferimento fisso alla parete si ha $u_w = 0$; nel caso, qui considerato, di bassi numeri di Mach, è anche costante h_e, pari all'entalpia esterna d'arresto; perciò U e H risultano variabili con x soltanto se lo sono u_e e h_w.

Si considerano dunque fluidi a bassa velocità e se ne suppongono costanti le proprietà fisiche ϱ, μ, $\varkappa$; in tali ipotesi una legge accurata e semplice che esprime direttamente $\tau_w(x)$ per qualsiasi $U(x)$, è stata dedotta dall'autore [1]; molto più complessa si presenta la legge del flusso $q_w(x)$, nota soltanto nei suoi comportamenti asintotici o per casi isolati particolari.

In questo lavoro, preliminare allo studio di potenziali $U(x)$ e $H(x)$ comunque variabili, si tratta il caso delle *correnti simili* caratterizzate da potenziali monomi

(2) $$U \propto x^m \quad \text{e} \quad H \propto x^n$$

Ai due esponenti caratteristici m e n conviene associare i rapporti

(3) $$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{2n}{m+1}$$

Se, come proposto da Görtler [2] per le correnti non simili, si introduce l'ascissa fisica

(4) $$X = \int \frac{U dx}{\nu} = \frac{Ux}{(m+1)\,\nu} \propto x^{m+1}$$

che è un numero longitudinale di Reynolds calcolato dall'origine della parete lambita, le (2) diventano

(5) $$U \propto X^{\beta/2} \quad \text{e} \quad H \propto X^{\gamma/2}$$

Per la placca piana si ha $m = \beta = 0$; per parete isoterma (h_w e H costanti) si ha $n = \gamma = 0$; soltanto per placca piana isoterma si ha $m = n = 0$, cioè la costanza di entrambi i potenziali U e H.

Mentre la $\tau_w(x)$ dipende solo da m, la $q_w(x)$ dipende da m, n, σ, dove σ è il numero di Prandtl

(6) $$\sigma = \frac{\mu}{\varkappa} = \frac{\nu}{\alpha}$$

rapporto fra i due coefficienti di trasporto che controllano le leggi elementari di Newton e di Fourier:

(7) $$\tau = \mu u_y = \varrho \nu u_y \quad \text{e} \quad q = \varkappa h_y = \varrho \alpha h_y$$

La conduttività entalpica $\varkappa$ è il rapporto fra conducibilità termica e calore specifico a pressione costante.

Nessuna delle sei dipendenze

$$\tau_w(x) \qquad \tau_w(m) \qquad q_w(x) \qquad q_w(m) \qquad q_w(n) \qquad q_w(\sigma)$$

risulta lineare o ragionevolmente linearizzabile.

Per elaborare la legge $q_w(x, m, n, \sigma)$ occorre conoscere le proprietà essenziali del profilo della velocità che, nello strato termico, opera la convezione di calore.

Se σ è molto piccolo, lo strato termico è molto più spesso di quello cinetico; è pertanto sufficiente conoscere la *coda* del profilo di velocità, cioè lo spessore di spostamento δ^* che misura il difetto di portata convettrice.

Se σ è molto grande, lo strato termico è molto più sottile di quello cinetico; è pertanto sufficiente conoscere la *testa* del profilo di velocità, cioè la sua pendenza e la sua curvatura a parete, espresse da τ_w e dp/dx.

La teoria delle correnti simili laminari [3], [4], [5] esprime in forma adimensionale le suddette grandezze:

(8) $$\alpha_2 = \delta^* \sqrt{\frac{(m+1)U}{2\nu x}}$$

(9) $$\alpha_1 = \frac{\tau_w}{\mu U} \sqrt{\frac{2\nu x}{(m+1)U}}$$

(10) $$\beta = \frac{-2x\, dp/dx}{(m+1)\varrho U^2}$$

Essendo $dp/dx = -\varrho U dU/dx$ la (10) coincide con la prima delle (3). Le funzioni $\alpha_1(\beta)$ e $\alpha_2(\beta)$ sono diagrammate in fig. 1; la tab. I riporta, per le sei correnti simili fondamentali, i risultati numerici di Smith [6], che ha perfezionato i precedenti calcoli di Hartree [7].

Il caso $\beta = -0.198838$ descrive la separazione; entrambe le funzioni $\alpha_1(\beta)$ e $\alpha_2(\beta)$ presentano la singolarità di Goldstein [8], cioè pendenza infinita; singolare come α_1 risulta anche $\tau_w \to 0$.

Il caso $\beta = 0$ $(m = 0)$ descrive la placca piana.

Il caso $\beta = 1/2$ $(m = 1/3)$ descrive il diedro simmetrico di 90° di apertura, ovvero il punto d'arresto di un corpo di rivoluzione.

Il caso $\beta = 1$ $(m = 1)$ descrive il punto d'arresto bidimensionale.

Il caso $\beta = 2$ $(m = \pm\infty)$ descrive le correnti esponenziali $U \propto e^{\pm x/c}$ con origine in $x = \mp\infty$; in questo caso il gruppo $x/(m+1) = x/m$ ha il significato di sottotangente $c = U/U_x$ della funzione $U(x)$; la τ_w risulta limitata.

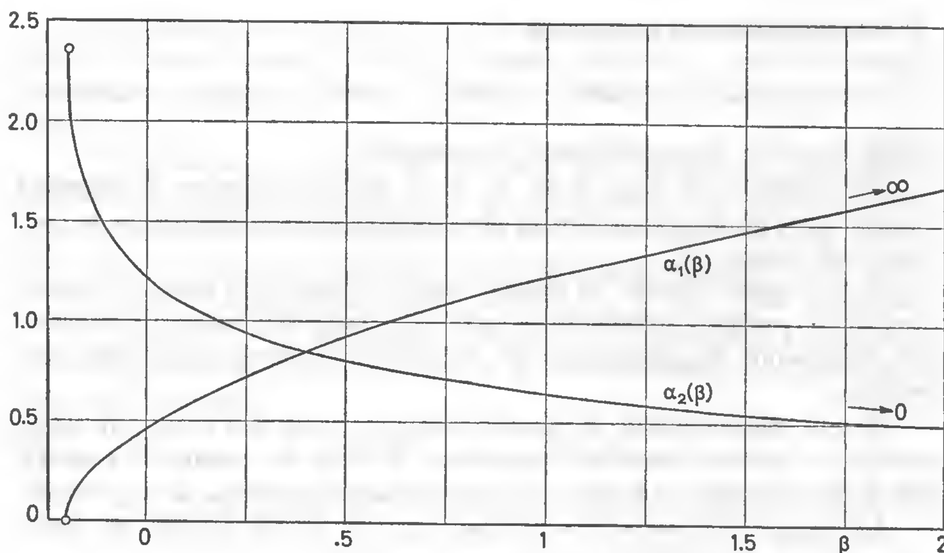


Fig. 1 - Sforzo di parete normalizzato α_1 e spessore di spostamento normalizzato α_2 in funzione del parametro β.

Il caso $\beta = \infty$ $(m = -1)$ descrive la corrente di pozzo, con U e x opposti e con origine all'∞; è il caso estremo di corrente accelerata, al limite di validità della teoria dello strato limite; le funzioni $\alpha_1(\beta)$ e $\alpha_2(\beta)$ sono singolari, ma la τ_w risulta ancora finita e regolare.

TABELLA I.

β	m	α_1	α_2	τ_w
-0.198838 *singolare*	-0.090429	0.000000 $d\alpha_1/d\beta = +\infty$	2.35885 $d\alpha_2/d\beta = -\infty$	0
regolari				
0	0	0.469600	1.21678	$0.332057\ U\sqrt{\varrho\mu U/x}$
1/2	1/3	0.927680	0.80455	$0.757448\ U\sqrt{\varrho\mu U/x}$
1	1	1.232588	0.64790	$1.232588\ U\sqrt{\varrho\mu U/x}$
2	$\pm\infty$	1.687218	0.49743	$1.193043\ U\sqrt{\varrho\mu U/c}$
∞ *singolare*	-1	$\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\beta}$ $\to \infty$	$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}$ $\to 0$	$1.154701\ U\sqrt{\varrho\mu(-U/x)}$

2. — Il flusso di calore su parete isoterma.

Consideriamo dapprima il caso di parete isoterma, caratterizzato da $n = \gamma = 0$ e $q_w = q_w(x, m, \sigma)$.

Passiamo anzitutto in rassegna le soluzioni analitiche note, procedendo da $\sigma = 0$ verso $\sigma = \infty$.

Per un fluido conduttore ma non viscoso ($\sigma = 0$), Morgan, Pipkin e Warner [9] hanno elaborato la legge

$$q_w = H \sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)}{\pi x} U} \qquad (\sigma = 0) \tag{11}$$

In questo caso la velocità nello strato termico ha ovunque il valore esterno U, non *frenato* dalla viscosità; perciò la (11) esprime il massimo valore possibile di q_w.

Seguendo un'idea di Curle [10] si possono descrivere i casi $\sigma > 0$ attenuando la velocità U con un fattore $\Phi < 1$, qui denominato

$$\textit{rendimento convettivo} = \Phi\,(m, \sigma) \tag{12}$$

$$q_w = H \sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)}{\pi x} U\Phi} \qquad (\sigma > 0) \tag{13}$$

Per σ piccolo ma non nullo, cioè per fluidi molto più conduttivi che viscosi come i plasmi o i vapori metallici, Morgan e coll. [9] e, con differente procedimento matematico, Lagerstrom [3], hanno valutato le correzioni da apportare alla (11). Agli stessi risultati si può pervenire con elementare e diretta derivazione fisica.

Per piccoli σ si può schematizzare il profilo di velocità come diagramma a gradino:

$$u = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 \leq y \leq \delta^* \qquad \text{(strato interno)}$$

$$u = U \qquad \text{per} \qquad \delta^* \leq y \leq \infty \qquad \text{(strato esterno)}$$

Nello strato interno il fluido è stagnante e trasmette calore per pura conduzione; nello strato esterno il fluido, non frenato dalla viscosità, trasmette calore per convezione secondo la (11); applicando quindi la regola dei *muri compositi*, detta h^* l'entalpia di interfaccia, risulta:

$$(14) \qquad q_w = (h_e - h^*)\sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)}{\pi x}U} = \frac{\varkappa\,(h^* - h_w)}{\delta^*} =$$

$$= (h_e - h_w)\sqrt{\frac{\varrho\varkappa\,(m+1)}{\pi x}U\Phi}\,.$$

Sommando i due salti parziali di entalpia e tenendo conto della (8), si ottiene immediatamente

$$(15) \qquad \frac{1}{\sqrt{\Phi}} = 1 + \alpha_2\sqrt{2\sigma/\pi} \qquad (\sigma \to 0)$$

Nelle attuali notazioni questo è il risultato di Lagerstrom [3], che invece Morgan e coll. [9] ottennero nella forma $\sqrt{\Phi} = 1 - \alpha_2\sqrt{2\sigma/\pi}$ equivalente alla (15) per $\sigma \to 0$, ma con dominio di validità meno esteso.

Per σ molto grandi, cioè per fluidi molto più viscosi che conduttivi come i liquidi e specialmente gli olii, Meksyn [11], ricorrendo al metodo della *ripida discesa* ha dedotto due leggi che, nelle notazioni attuali, diventano

$$(16) \qquad \Phi = \frac{\pi\,(\alpha_1/\sqrt{\sigma})^{2/3}}{2\,(3!)^{2/3}\,\Gamma^2(4/3)} = \left(\frac{\alpha_1}{2.170181\sqrt{\sigma}}\right)^{2/3}, \qquad \text{se } \sigma \to \infty \text{ e } \tau_w \neq 0$$

$$(17) \qquad \Phi = \frac{\pi\sqrt{-\beta/\sigma}}{2\,(4!)^{1/2}\,\Gamma^2(5/4)} = \left(\frac{\sqrt{-\beta}}{2.562288\sqrt{\sigma}}\right), \qquad \text{se } \sigma \to \infty \text{ e } \tau_w = 0$$

Una erronea estrapolazione della (16) fino a separazione darebbe $\Phi = 0$ essendo $\alpha_1 = 0$; questo è il punto debole di calcoli approssimati, come quelli originali di Fage e Falkner [12], o di teorie approssimate, come quella di Lighthill [13], che assimilano il profilo di velocità alla sua tangente di parete.

Invece della (16), a separazione vale la (17) che fa intervenire non più la pendenza α_1, ora nulla, ma la curvatura β del profilo di velocità; le (16), (17) descrivono due differenti decadimenti di Φ: $\propto \sigma^{-1/3}$ e $\propto \sigma^{-1/2}$, rispettivamente.

Una legge completa $\Phi(m, \sigma)$, valida per tutti i σ, deve raccordare le (15), (16) se $\tau_w \neq 0$ oppure le (15), (17) se $\tau_w = 0$.

Una riuscita interpolazione fra le leggi asintotiche eviterà di dover conoscere, oltre che la testa e la coda, anche il *cuore* dei profili di velocità.

La (15) può essere risolta rispetto a σ

$$\sigma = \frac{\pi}{2\alpha_2^2} \frac{(1 - \sqrt{\Phi})^2}{\Phi}$$

e poi generalizzata, rispettando la corretta tangente iniziale, con l'introduzione di due esponenti arbitrari a e b

$$\sigma = \frac{\pi}{8\alpha_2^2 a^2} \frac{(1 - \Phi^a)^2}{\Phi^b} \tag{18}$$

Questa forma *flessibile* della (15) risulta immediatamente saldabile con le espressioni asintotiche (16), (17); l'identificazione, per $\sigma \to \infty$ cioè $\Phi \to 0$, determina i valori di a e b:

$$b = 3 \qquad a = \frac{2.170\sqrt{\pi/8}}{\alpha_2\alpha_1} \qquad \text{se } \tau_w \neq 0$$

$$b = 2 \qquad a = \frac{2.562\sqrt{\pi/8}}{\alpha_2\sqrt{-\beta}} \qquad \text{se } \tau_w = 0$$

La legge completa $\Phi(m, \sigma)$ risulta pertanto espressa, nella forma implicita $\sigma = \sigma(\Phi, m)$, dalle seguenti equazioni:

$$\sigma = \left(\frac{\alpha_1}{2.170}\right)^2 \frac{(1 - \Phi^a)^2}{\Phi^3}, \qquad a = \frac{1.360}{\alpha_2\alpha_1}, \qquad \text{se } \tau_w \neq 0 \tag{19}$$

$$\sigma = \left(\frac{\sqrt{-\beta}}{2.562}\right)^2 \frac{(1 - \Phi^a)^2}{\Phi^2}, \qquad a = \frac{1.605}{\alpha_2\sqrt{-\beta}}, \qquad \text{se } \tau_w = 0 \tag{20}$$

La tab. II cataloga tali equazioni per le sei correnti simili fondamentali, già considerate nella tab. I. La fig. 2 illustra l'andamento, nei suddetti sei casi, del rendimento convettivo $\Phi(\beta, \sigma)$ sulle sei decadi $10^{-3} < \sigma < 10^{+3}$; l'accordo con i 35 punti calcolati numericamente da Laudanna e Quori [14] è ovunque eccellente; gli errori massimi sono del 3 % circa su Φ, perciò dell'1.5% su $q_w \propto \sqrt{\Phi}$.

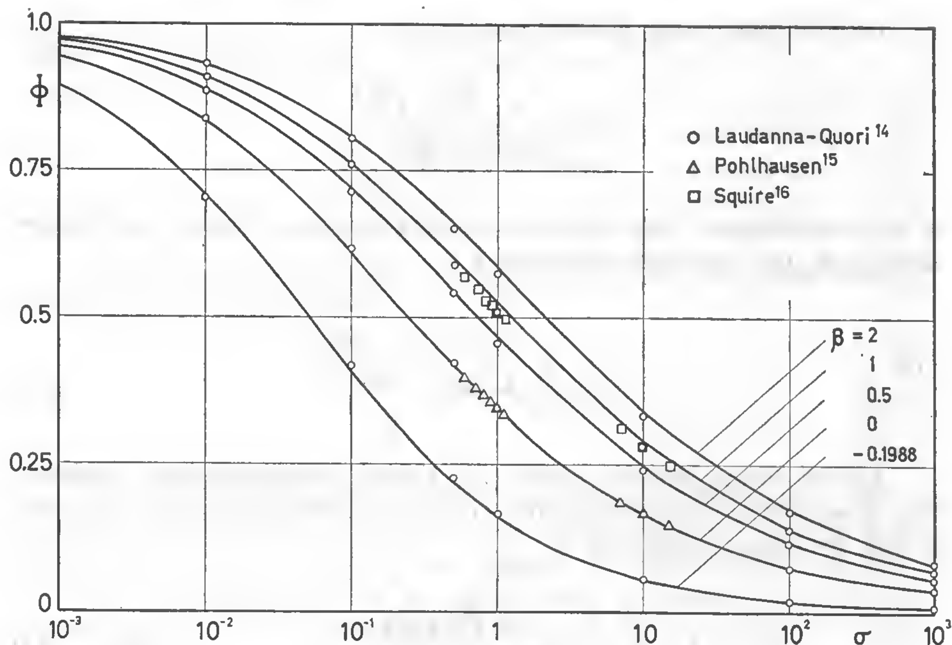


Fig. 2 - Il rendimento convettivo Φ in funzione del numero di Prandtl σ e del parametro β, nei sei casi fondamentali elencati in tab. II.

Sulla fig. 2 si possono riconoscere tutte le singolarità della $\Phi(\beta, \sigma)$:

— sia vista come $\Phi(\sigma)$ per dato β, cioè

$$(1 - \Phi) \propto \sigma^{1/2} \qquad \text{se } \sigma \to 0$$

$$\Phi \propto \sigma^{-1/3} \qquad \text{se } \sigma \to \infty \text{ e } \tau_w \neq 0$$

$$\Phi \propto \sigma^{-1/2} \qquad \text{se } \sigma \to \infty \text{ e } \tau_w = 0$$

— sia vista come $\Phi(\beta)$ per dato σ; è evidente la regolare variazione di Φ nel campo $0 \leq \beta \leq 2$, contrapposta alla rapida *caduta*, nel campo dieci volte più stretto $-0.2 < \beta < 0$, verso i valori di separazione; tale caduta essendo sempre prodotta dalle singolarità di Goldstein [8]:

in quanto singolarità di $\alpha_2(\beta)$ se $\sigma \to 0$

in quanto singolarità di $\alpha_1(\beta)$ se $\sigma \to \infty$.

Sulla fig. 2 sono pure riportati i valori numerici esatti calcolati, fra $\sigma = 0.6$ e $\sigma = 15$, da Pohlhausen [15] per la placca piana ($\beta = 0$) e da Squire [16] per il punto d'arresto bidimensionale ($\beta = 1$). Si tratta di risultati tipici di innumerevoli ricerche polarizzate nel campo dei gas, caratterizzati da σ prossimi a 1; ma i risultati dell'aerogasdinamica in tale settore non hanno la potenza conoscitiva delle semplici soluzioni asinto-

tiche: da sole, queste hanno fornito gli strumenti per la determinazione *in grande* del rendimento convettivo Φ, in forma soddisfacente *anche* nel dominio intermedio dei gas.

La tab. II elenca, nella terza colonna e nella classica forma monomia, le leggi $\Phi(\sigma)$ valide intorno a $\sigma = 1$; tali espressioni sono state dedotte dalla seconda colonna, con calcolo esatto dei valori e delle derivate prime di Φ per $\sigma = 1$; sono pure indicati gli errori che sono circa i massimi di tutto il campo $0 < \sigma < \infty$, dato che il caso $\sigma = 1$ è lontano da entrambi i comportamenti asintotici.

In particolare il valore $\Phi = 0.342$, invece dell'esatto 0.346, per la placca piana con $\sigma = 1$, introduce un errore dello 0.6% nella classica analogia di Reynolds: $\tau_w/U = q_w/H$, valida per $m = n = 0$ e $\sigma = 1$.

Ancora sulla terza colonna della tab. II si può osservare che:

— l'esponente 0.454 del decadimento $\Phi(\sigma)$ a separazione è già prossimo al valore asintotico 1/2;

— l'esponente 0.294 per la placca piana è anch'esso prossimo al valore asintotico 1/3;

— ma crescendo β l'esponente di σ diminuisce fino ad annullarsi per la corrente di pozzo.

TABELLA II.

β	$\sigma(\Phi)$	$\Phi(\sigma)$ $\sigma \simeq 1$
-0.198838	$\sigma = \dfrac{(1 - \Phi^{1.527})^2}{33.02\,\Phi^2}$	$\Phi = 0.163\,\sigma^{-0.454}$ errore -2.4%
0	$\sigma = \dfrac{(1 - \Phi^{2.380})^2}{21.36\,\Phi^3}$	$\Phi = 0.342\,\sigma^{-0.294}$ errore -1.3%
0.5	$\sigma = \dfrac{(1 - \Phi^{1.822})^2}{5.473\,\Phi^3}$	$\Phi = 0.468\,\sigma^{-0.237}$ errore $+2.6\%$
1	$\sigma = \dfrac{(1 - \Phi^{1.703})^2}{3.100\,\Phi^3}$	$\Phi = 0.524\,\sigma^{-0.213}$ errore $+2.7\%$
2	$\sigma = \dfrac{(1 - \Phi^{1.620})^2}{1.654\,\Phi^3}$	$\Phi = 0.587\,\sigma^{-0.186}$ errore $+2.1\%$
∞	$\sigma/\beta = \dfrac{(1 - \Phi^{1.513})^2}{3.532\,\Phi^3}$	$\Phi = 1.000\,\sigma^{-0.000}$ errore 0%

In altri termini il comportamento dei gas, più prossimo, in decelerazione, a quello degli olii ($\sigma \to \infty$), si sposta, in accelerazione, verso il comportamento dei vapori metallici ($\sigma \to 0$).

La estrema corrente di pozzo ($\beta = \infty$, $m + 1 = 0$) richiede un commento a sé. Dalla tab. II risulta che per $\sigma < \infty$ si ha sempre $\Phi = 1$, essendo $\beta = \infty$; soltanto per σ *più* infinito di β, ovvero per $\sigma/\beta \to \infty$, si verifica poi l'estremo decadimento a $\Phi = 0$. Ma, per qualsiasi valore di Φ, il flusso q_w è sempre nullo essendo $m + 1 = 0$.

Questa conclusione sulla corrente di pozzo vale soltanto nel caso, finora considerato, di parete isoterma, e dovrà essere ridiscussa nel caso più generale di parete non isoterma.

3. — Il flusso di calore su parete non isoterma.

Consideriamo ora il caso di parete non isoterma, caratterizzato da $n \neq 0$ ovvero $\gamma \neq 0$ e $q_w = q_w(x, m, n, \sigma)$.

Il flusso termico non è più controllato dal valore locale del potenziale $H(x)$, ma da un valore *distorto* che denominiamo *potenziale efficace* $\mathcal{H}(x)$.

La (13), che già generalizza la (11), deve essere ulteriormente generalizzata nella forma

$$q_w = \mathcal{H} \sqrt{\frac{\varrho \varkappa (m+1)}{\pi x} U \Phi} \tag{21}$$

con la quale confrontiamo i risultati noti, procedendo da $\sigma = 0$ verso $\sigma = \infty$.

Per il caso asintotico $\sigma = 0$, Morgan e coll. [6] hanno dedotto

$$\frac{\mathcal{H}}{H} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} \begin{cases} = -\infty & \text{per } \gamma = -2 \\ = 0 & \text{per } \gamma = -1 \\ = 1 & \text{per } \gamma = 0 \\ = \infty & \text{per } \gamma = \infty \end{cases} \tag{22}$$

Per il caso asintotico $\sigma = \infty$ e $\tau_w \neq 0$, Lighthill [13], ricorrendo al calcolo operazionale, ha dedotto

$$(23)\qquad \frac{\mathcal{H}}{H} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{2\gamma}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+\frac{2\gamma}{3}\right)} \begin{cases} = -\infty & \text{per } \gamma = -3/2 \\ = 0 & \text{per } \gamma = -1 \\ = 1 & \text{per } \gamma = 0 \\ = \infty & \text{per } \gamma = \infty \end{cases}$$

Per il caso asintotico $\sigma = \infty$ e $\tau_w = 0$ non esistono risultati analitici; ma i valori numerici calcolati da Laudanna e Quori [14] permettono, nel caso della separazione con $\sigma = 100$ e 1000, di stabilire con esattezza un risultato analogo ai precedenti:

$$(24)\qquad \frac{\mathcal{H}}{H} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{3\gamma}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{3\gamma}{4}\right)} \begin{cases} = -\infty & \text{per } \gamma = -4/3 \\ = 0 & \text{per } \gamma = -1 \\ = 1 & \text{per } \gamma = 0 \\ = \infty & \text{per } \gamma = \infty \end{cases}$$

La situazione $\gamma = -1$, che dà sempre $\mathcal{H} = q_w = 0$ con $H \neq 0$, è stata opportunamente definita di *inversione termica* da Laudanna e Quori [14], in quanto q_w e H diventano opposti per γ inferiori; questa situazione non va confusa con il *caso adiabatico* in cui risulta ancora $\mathcal{H} = q_w = 0$, però perché $h_w = h_e$ ovvero $H = 0$.

La fig. 3 illustra gli andamenti delle tre distorsioni asintotiche espresse dalle (22), (23), (24), ed evidenzia che

$\mathcal{H}/H > 1$, se $\gamma > 0$, cioè, secondo la (5): $\mathcal{H}(X) > H(X)$, se $H(X)$ è crescente,

$\mathcal{H}/H < 1$, se $\gamma < 0$, cioè, secondo la (5): $\mathcal{H}(X) < H(X)$, se $H(X)$ è decrescente,

cioè evidenzia che le distorsioni trasformamo sempre il potenziale locale $H(X)$ in un *potenziale anticipato* $\mathcal{H}(X)$.

Conviene unificare i risultati asintotici in una formulazione valida anche per le situazioni intermedie ($0 < \sigma < \infty$):

(25) *Anticipo* (¹) $= A(\gamma; j) =$

$$= \frac{\mathcal{H}}{H} = \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{j+2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j+1}{j+2}\gamma\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{j+2}+\frac{j+1}{j+2}\gamma\right)} \begin{cases} = -\infty & \text{per } \gamma = -\frac{2+j}{1+j} \\ = 0 & \text{per } \gamma = -1 \\ = 1 & \text{per } \gamma = 0 \\ = \infty & \text{per } \gamma = \infty\,. \end{cases}$$

(¹) La denominazione di *anticipo* attribuita alla *distorsione* diventerebbe criticabile nel caso di una $H(x)$ a gradino.

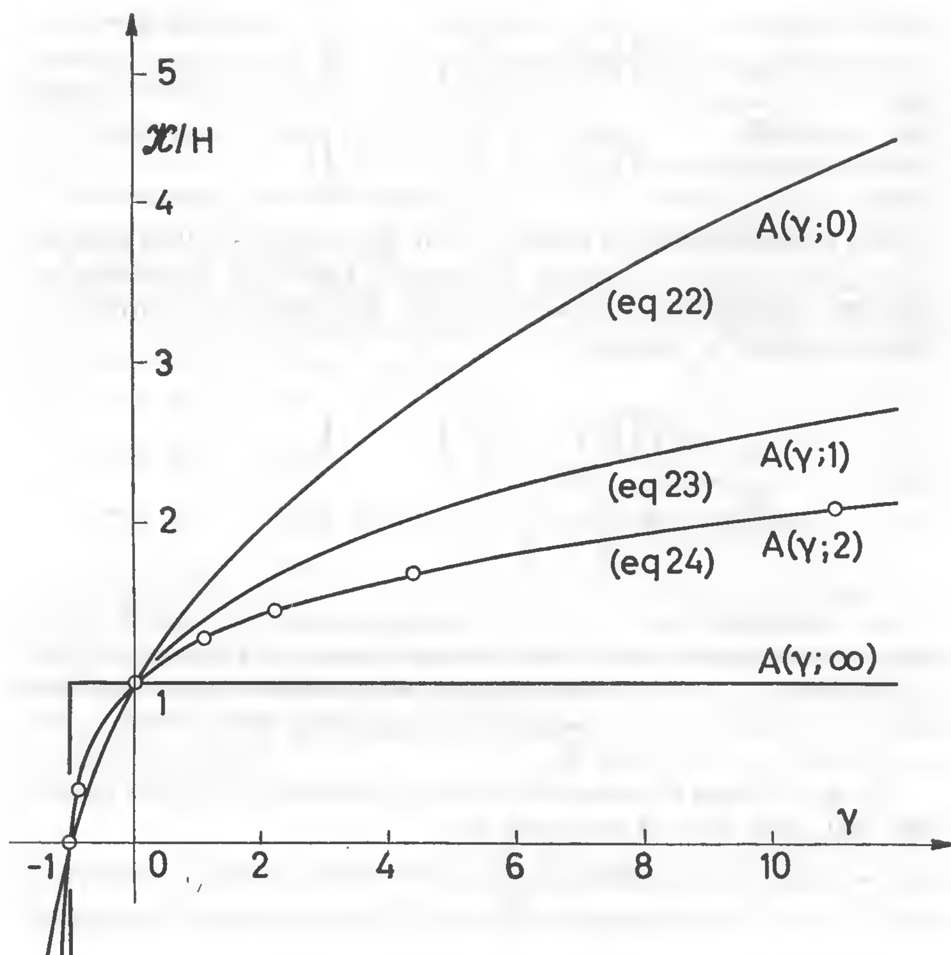


Fig. 3 - Gli anticipi termici $A(\gamma; j)$ nei quattro casi estremi:

$j = 0$ valido per $\sigma = 0$

$j = 1$ valido per $\sigma = \infty$ e $\tau_w \neq 0$

$j = 2$ valido per $\sigma = \infty$ e $\tau_w = 0$

$j = \infty$ caso limite.

Si ritrovano le (22), (23), (24) ponendo successivamente $j = 0, 1, 2$. L'anticipo risulta massimo ed uguale a $A(\gamma; 0)$ per fluido esclusivamente conduttore, poi si attenua, al crescere di σ, fino ai valori minimi del fluido esclusivamente viscoso: $A(\gamma; 1)$ se $\tau_w \neq 0$ oppure $A(\gamma; 2)$ se $\tau_w = 0$.

Neppure in questi casi estremi viene raggiunto il valore $A(\gamma; \infty) = 1$, illustrato anch'esso in fig. 3, che significherebbe completa cancellazione viscosa dell'anticipo conduttivo.

La viscosità dunque sovrappone un ritardo, più debole, al più forte anticipo conduttivo; questo meccanismo è descritto dalla crescita dell'indice j che perciò denominiamo *indice del ritardo viscoso*.

Ma la sola conoscenza dei casi asintotici (22), (23), (24) non dà indicazioni utili sui valori intermedi da attribuire a j.

Ricorriamo di nuovo all'efficace regola dei muri compositi, valida per $\sigma \to 0$; ora la (14) prende la forma più generale:

$$(14') \qquad q_w = (h_e - h^*)A(\gamma;0)\sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)}{\pi x}U} = \frac{\varkappa(h^* - h_w)}{\delta^*} =$$

$$= (h_e - h_w)A(\gamma;j)\sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)}{\pi x}U\Phi}$$

dalla quale risulta, sommando i salti parziali di entalpia:

$$(15') \qquad \frac{1}{A(\gamma;j)\sqrt{\Phi}} = \frac{1}{A(\gamma;0)} + \alpha_2\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \qquad (\sigma \to 0)$$

Sottraendo la (15), valida per $\gamma = 0$, si ottiene la seguente descrizione del decadimento iniziale dell'anticipo da $A(\gamma;0)$ ad $A(\gamma;j)$:

$$(26) \qquad \frac{1}{A(\gamma;j)} = \frac{\sqrt{\Phi}}{A(\gamma;0)} + \frac{1-\sqrt{\Phi}}{1} \qquad (\sigma \to 0)$$

Questa legge vale soltanto per piccoli j, cioè $\Phi \to 1$ e $\sigma \to 0$; per $\sigma \to \infty$, cioè $\Phi \to 0$, la (26) darebbe infatti $A(\gamma;j) = 1$, che è il valore, mai raggiunto, di cancellazione totale dell'anticipo.

A piccoli valori di j nella (25), la (26) fa corrispondere piccoli difetti $(1 - \Phi)$; differenziando dette equazioni si ottiene la relazione:

$$(27) \qquad j = 2G(1-\Phi) \qquad 2G = \frac{(\partial A/\partial \Phi)_{\Phi=1}}{(-\partial A/\partial j)_{j=0}}$$

Per prolungare la validità di questo risultato fino a $\sigma = \infty$, conviene scriverlo nelle forme ad esso tangenti e tangenti fra loro:

$$(28) \qquad j = 1 - \Phi^{2G} \qquad \text{se } \tau_w \neq 0$$

$$(29) \qquad j = 2(1 - \Phi^{G}) \qquad \text{se } \tau_w = 0$$

che si saldano con i valori estremi per $\sigma = \infty$ ovvero $\Phi = 0$:

$$j = 1 \ (\text{se } \tau_w \neq 0) \quad \text{e} \quad j = 2 \ (\text{se } \tau_w = 0).$$

Il calcolo esplicito dell'esponente G, definito dalla seconda equazione (27), coinvolge la funzione $\psi(z) = d\{\ln \Gamma(z)\}/dz$ è dà il risultato seguente:

$$G(\gamma) = \frac{A(\gamma;0) - 1}{(\gamma+1)\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \gamma\left[\psi\left(1+\frac{\gamma}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]} . \tag{30}$$

La tab. III elenca i valori numerici dei tre anticipi asintotici $A(\gamma; 0)$, $A(\gamma; 1)$, $A(\gamma; 2)$, e dell'esponente $G(\gamma)$; i valori asintotici per $\gamma \to \infty$ sono stati ottenuti ricorrendo alla formula di Stirling. Per tutte le proprietà ed i valori delle funzioni Γ e ψ si è ricorsi al manuale di Abramowitz e Stegun [17].

TABELLA III.

γ	$A(\gamma; 0)$	$A(\gamma; 1)$	$A(\gamma; 2)$	$G(\gamma)$
-1	0	0	0	0.5000
-0.5	0.5991	0.6845	0.7416	0.5784
0	1.0000	1.0000	1.0000	0.6411
$+0.5$	1.3110	1.2092	1.1567	0.6936
1	1.5708	1.3689	1.2708	0.7388
2	2.0000	1.6123	1.4378	0.8147
3	2.3562	1.8000	1.5620	0.8777
4	2.6667	1.9556	1.6623	0.9321
5	2.9452	2.0900	1.7474	0.9803
10	4.0635	2.5910	2.0531	1.1673
15	4.9356	2.9498	2.2629	1.3065
20	5.6755	3.2378	2.4266	1.4205
∞	$(1.5708\gamma)^{1/2}$	$(1.6553\gamma)^{1/3}$	$(1.6912\gamma)^{1/4}$	$\frac{(\pi\gamma/2)^{1/2}}{\ln(\gamma/2)}$

Risulta dalle (28), (29) che l'indice di ritardo j dipende da β e σ soltanto tramite il rendimento convettivo $\Phi(\beta, \sigma)$; e dipende da γ tramite l'esponente G; eliminando G e j, per mezzo delle (28), (30) se $\tau_w \neq 0$ oppure per mezzo delle (29), (30) se $\tau_w = 0$, è quindi possibile esprimere l'anticipo $A(\gamma; j)$ come $A\{\gamma; \Phi\}$; questa operazione è stata eseguita numericamente ed è illustrata nelle figg. 4a (per $\tau_w \neq 0$) e 4b (per $\tau_w = 0$).

Il metodo proposto è sintetizzato nelle figg. 2 e 4; la prima, dati β e σ, fornisce Φ; la seconda, noto Φ e dato γ, fornisce $A = \mathcal{H}/H$.

Il metodo è stato applicato al calcolo dell'anticipo A nei 210 casi tabulati e diagrammati da Laudanna e Quori [14]; si tratta dei 35 casi

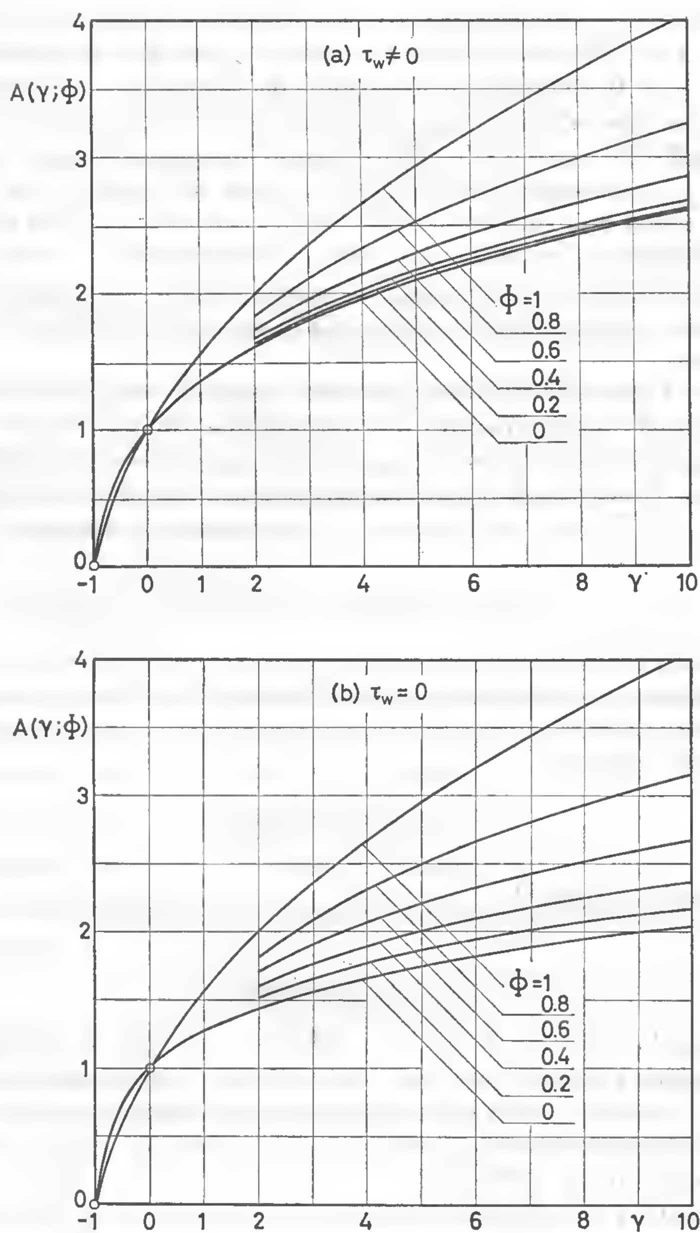


Fig. 4 - L'anticipo termico $A(\gamma; \Phi)$ nei due casi:
(a) per $\tau_w \neq 0$
(b) per $\tau_w = 0$.

illustrati in fig. 2, tutti a loro volta calcolati per 6 valori di γ: uno negativo ($\neq -1$) e cinque positivi fino a $\gamma = 22$. I massimi errori sono risultati

del 3% come nel caso della $\Phi(\beta, \sigma)$. Errori inferiori si riscontrano nel caso dell'aria ($\sigma = 0.72$) che lambisce una placca piana ($\beta = 0$) a temperatura variabile ($\gamma \neq 0$), numericamente risolto da Chapman e Rubesin [18]; si tratta di un caso ormai prossimo alla situazione asintotica $j = 1$, espressa da Lighthill [13] con la (23). Ma l'impiego di questa formula asintotica dà errori molto maggiori non soltanto nel caso di σ minori, ma anche, a parità di σ, nel caso di valori positivi di β, cioè per le correnti accelerate, meno asintotizzate, verso $\sigma \to \infty$, della placca piana.

Assolutamente erroneo sarebbe l'impiego della formula asintotica (23) nel caso della estrema corrente accelerata di pozzo, che richiede un ulteriore commento.

Già si è visto alla fine del precedente capitolo che per la corrente di pozzo risulta $\Phi = 1$ per tutti i $\sigma < \infty$; quindi la (28) dà $j = 0$, e l'anticipo vale sempre $A(\gamma; 0) > A(\gamma; 1)$; per valori finiti di n si ha inoltre $\gamma = 2n/(m + 1) = \infty$; vale quindi l'espressione asintotica indicata in tab. III: $A(\gamma; 0) = \sqrt{\pi\gamma/2}$, che introdotta nella (21) con $\Phi = 1$, fornisce:

$$q_w = H\sqrt{\varrho\varkappa(-U/x)(-n)} \tag{31}$$

Soltanto per $n < 0$ si crea, nel caso della corrente di pozzo, una possibilità di flusso termico reale e non nullo; questo risultato è meno singolare del già discusso caso particolare $q_w = 0$ per $n = 0$, se visto come analogo del risultato regolare

$$\tau_w = U\sqrt{\varrho\mu(-4U/3x)} \tag{32}$$

già evidenziato in tab. I.

4. — Conclusioni.

Il metodo elaborato fornisce la valutazione *in grande* del flusso termico laminare $q_w(x, m, n, \sigma)$, per qualsiasi valore delle quattro variabili, per tutte le correnti simili dal caso estremamente decelerato della separazione al caso estremamente accelerato della corrente di pozzo, e per fluidi con qualsiasi numero di Prandtl.

Analizzati i *soli* comportamenti asintotici noti, si è proceduto a due essenziali operazioni di *saldatura* per ottenere rappresentazioni complete ed accurate:

— del rendimento convettivo $\Phi(\beta, \sigma)$

— dell'indice di ritardo viscoso $j(\Phi, \gamma)$

cioè delle funzioni che controllano il valore del flusso termico.

Il metodo elaborato comporta

— l'impiego analitico

delle (19), (20) per determinare $\Phi(\beta, \sigma)$
della (30) per determinare $G(\gamma)$
delle (28), (29) per determinare $j(\Phi, G)$
della (25) per determinare $A(\gamma, j)$

— oppure l'impiego grafico

dei diagrammi della fig. 2 per ricavare $\Phi(\beta, \sigma)$
dei diagrammi delle fig. 4 per ricavare $A(\gamma,\Phi)$.

Noti, analiticamente o graficamente, i valori del rendimento convettivo Φ e dell'anticipo A, la (21) esprime infine il flusso termico q_w.

Il metodo elaborato può utilmente essere sintetizzato fattorializzando come segue il coefficiente di trasmissione q_w/H, che trasduce il salto di potenziale H in flusso termico q_w:

$$\frac{q_w}{H} = \left[\sqrt{\frac{\varrho\varkappa(m+1)U}{\pi x}}\right]\left[A(\gamma;0)\right]\left[\sqrt{\Phi}\right]\left[\frac{A(\gamma;j)}{A(\gamma;0)}\right]. \tag{33}$$

Il primo fattore è l'*AMMETTENZA* conduttiva, pari al coefficiente di trasmissione su parete isoterma per fluido con $\sigma = 0$.

Il secondo fattore è l'*ANTICIPO* conduttivo.

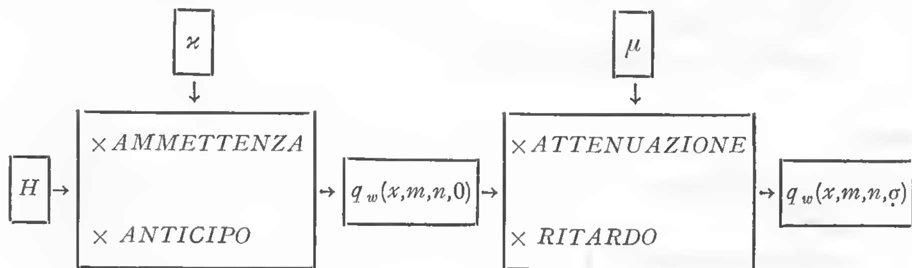
Il terzo fattore è l'*ATTENUAZIONE* viscosa.

Il quarto fattore è il *RITARDO* viscoso.

I primi due fattori sono determinati dalla conducibilità; gli ultimi due dalla viscosità.

Primo e terzo fattore sussistono per potenziali $H(x)$ costanti o variabili; secondo e quarto fattore sono differenti da 1 solo se il potenziale $H(x)$ è variabile.

La (33) decompone la trasduzione dal potenziale H al flusso q_w in quattro operazioni, come illustrato nel seguente schema conclusivo a blocchi:



Se il potenziale H è costante, la conducibilità determina la *ammettenza* alla quale la viscosità applica la *attenuazione*; se H è variabile intervengono le ulteriori operazioni seguenti: la conducibilità determina l'*anticipo* al quale la viscosità sovrappone il *ritardo*.

SIMBOLI

A	anticipo termico
G	esponente (eq. 27)
h	entalpia
H	salto di entalpia (eq. 1)
$\mathcal{H}$	salto efficace di entalpia
j	indice di ritardo
m	esponente della $U(x)$ (eq. 2)
n	esponente della $H(x)$ (eq. 2)
p	pressione
q	flusso termico
u	velocità lungo x
U	salto di velocità (eq. 1)
x	ascissa lambita dalla corrente
X	ascissa fisica (eq. 4)
y	coordinata normale alla superficie lambita
α	diffusività termica
α_1	sforzo di parete normalizzato (eq. 9)
α_2	spessore di spostamento normalizzato (eq. 8)
β	parametro di gradiente di pressione (eq. 3)
γ	parametro di gradiente di entalpia (eq. 3)
δ^*	spessore di spostamento
$\varkappa$	conducibilità entalpica
μ	viscosità dinamica
ν	viscosità cinematica
ϱ	densità
σ	numero di Prandtl
τ	sforzo di parete
Φ	rendimento convettivo (eq. 12)

Indici

e	corrente esterna
w	parete
y	derivata rispetto a y

BIBLIOGRAFIA

[1] JARRE G., vol. *Omaggio a Carlo Ferrari*, p. 391, ed. Levrotto & Bella, Torino (1974).

[2] GOERTLER H., « J. Math. Mech. », **6**, 1 (1957).

[3] LAGERSTROM P. A., Sez. B, *Laminar Flow Theory*, Vol. IV « High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion », Princeton University Press (1964).

[4] ROSENHEAD L., *Laminar Boundary Layers*, Clarendon Press, Oxford (1962).

[5] SCHLICHTING H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill (1955).

[6] SMITH A.M.O., « Inst. Aer. Sci. », S.M.F. Fund Paper FF/10 (1974).

[7] HARTREE D. R., « Proc. Cambridge Phil. Soc. », **33**, 223 (1937).

[8] GOLDSTEIN S., « Quart. J. Mech. », **1**, 43 (1948).

[9] MORGAN G. W., PIPKIN A. C., WARNER W. H., « J. Aerospace Sci. », **25**, 173 (1958).

[10] CURLE N., *The Laminar Boundary Layer Equations*, Clarendon Press, Oxford (1962).

[11] MEKSYN D., *New Methods in Laminar Boundary Layer Theory*, Pergamon Press (1961).

[12] FAGE A., FALKNER V. M., ARC R&M 1408 (1930).

[13] LIGHTHILL M. J., « Proc. Roy. Soc. A. », **202**, 359 (1950).

[14] LAUDANNA M., QUORI F., «Mem. Acc. Lincei», (VIII) vol. XII, 231, Roma (1974).

[15] POHLHAUSEN E., « Z. Angew. Math. Mech. », **1**, 115 (1921).

[16] SQUIRE H. B., Cap. XIV, *Modern Development in Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford (1938).

[17] ABRAMOVITZ M., STEGUN I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York (1965).

[18] CHAPMAN D. R., RUBESIN M. W., « J. Aero. Sci. », **16**, 547 (1949).

MAURIZIO PANDOLFI (*)

Flusso supersonico su corpi conici (**).

Riassunto. — *Considerevole attenzione è stata rivolta allo studio numerico del flusso supersonico su corpi conici, ellittici in particolare.*

Dall'esame della bibliografia in merito appare che gli approcci usati sono stati diversi, per le formulazioni del problema, le variabili prescelte ed il sistema di coordinate. Tuttavia nessuna soluzione numerica è stata ottenuta per coni ellittici molto appiattiti, vale a dire per rapporti (R) dei semiassi dell'ellisse (sezione trasversale del cono) maggiori di 3,3 ÷ 3,7.

Nel presente lavoro mi propongo di mostrare come soluzioni numeriche, su coni ellittici ad elevato rapporto dei semiassi, possono essere ottenute in base alla scelta di opportune variabili e sistema di coordinate, diversi da quelli usualmente assunti.

Viene presentato il confronto con risultati numerici ottenuti da altri autori e con risultati sperimentali in casi di bassi rapporti dei semiassi, quali quelli riportati in letteratura.

Successivamente viene illustrata la transizione del campo di pressione nello strato d'urto fra cono circolare ($R = 1$) e cono ellittico ad elevato R, quasi assimilabile ad ala a delta di spessore infinitesimo.

Infine vengono studiati gli effetti dell'incidenza (moderata per non dar luogo alla formazione di urti sul flusso trasversale) e dell'imbardata con particolare attenzione alla posizione delle singolarità di entropia.

Formulazione del problema.

Rivolgendo l'interesse a configurazioni di flusso conico, si possono ritrovare in bibliografia due linee di approccio al problema:

— si assume a priori la condizione di flusso conico ed il problema è quindi ricondotto in una forma bidimensionale grazie alla similitudine conica; la soluzione numerica viene ottenuta tramite qualche algoritmo iterativo;

(*) Politecnico di Torino.

(**) Ricerca finanziata dal C.N.R. (Contratto n. 74.00380.07 - 115.6799).

— si assumono in una stazione iniziale le configurazioni di flusso nello strato d'urto (regione compresa fra l'urto esterno ed il corpo), e dell'urto stesso; si integrano quindi lungo l'asse del cono le equazioni del flusso tridimensionale, raggiungendo la soluzione del flusso conico, a grande distanza dalla stazione iniziale.

Va tuttavia tenuto presente che, pure per incidenza (α) e per imbardata (ψ) nulle, il flusso conico non è assialsimmetrico (ad eccezione del caso limite di cono circolare). In tal caso, come messo in evidenza in [1], si creano, in tali flussi, singolarità di entropia (punti nei quali il valore dell'entropia non è univocamente determinato).

Nel caso di coni ellittici con $\alpha = \psi = 0$, si ha la formazione di due singolarità, sul piano di simmetria contenente l'asse minore dell'ellisse, al corpo (pozzi di entropia).

D'altra parte due punti di sorgente (come usualmente chiamati) di entropia, costituenti punti di ristagno con riferimento al flusso trasversale, si localizzano, sempre al corpo, sul piano di simmetria contenente l'asse maggiore. Questa configurazione è riconosciuta corretta a bassi valori del rapporto R. Per elevati valori di R, è stato suggerito che ogni singolarità di entropia si divida in due, che, pur permanendo al corpo, si dipartono dal piano di simmetria contenente il semiasse minore [2], [3]; tuttavia tale opinione non è condivisa in genere, ma criticata [4].

Quando si tengano in conto piccole o moderate incidenze ($\alpha \neq 0$, $\psi = 0$), le singolarità di entropia permangono sul corpo; tuttavia per angoli d'attacco rimarchevoli la singolarità sottovento potrebbe sollevarsi dal corpo nello strato d'urto. Questa tendenza è messa in evidenza in alcuni calcoli riportati in [3] per coni circolari; va però notato che questi risultati sono affetti da procedure smorzanti nell'algoritmo numerico e la loro affidabilità è quindi discutibile; per esempio non appare traccia di urti trasversali.

Nel caso di imbardata ($\alpha = 0$; $\psi \neq 0$) le singolarità si scostano dal piano di simmetria del semiasse minore e possono essere assorbite dal punto di sorgente sottovento, per alti angoli d'imbardata [5].

Queste considerazioni mettono in evidenza che la posizione delle singolarità di entropia non è nota a priori, in genere, e che ogni tipo di formulazione del problema (sia nell'ipotesi di flusso conico, che in quelle ove si assumono condizioni iniziali in una certa stazione) deve essere attentamente vagliata.

Nell'intento di evitare ogni arbitrarietà nell'impostazione del problema, è stato suggerito in [6] di seguire il secondo dei summenzionati approcci e di assumere quali condizioni iniziali quelle del flusso immediatamente a valle di una punta tozza posta in testa al cono. Tale flusso rappresenta una reale situazione fisica, può essere calcolato con ottima accuratezza

ed infine non presenta alcuna singolarità nell'entropia. A tal punto l'integrazione delle equazioni del flusso tridimensionale lungo l'asse del cono, sino a notevoli distanze dalla punta, porta ad individuare la configurazione di flusso conico.

Le singolarità di entropia verranno a formarsi gradualmente senza ricorrere a particolari assunzioni.

Tuttavia nascono altri problemi collegati allo strato di entropia dovuto alla punta tozza, nelle prime fasi dell'integrazione, ben prima del conseguimento della configurazione conica [6], [7].

Nel caso di $\alpha = \psi = 0$, una semplice e corretta configurazione di partenza per la successiva integrazione può essere data dalla soluzione del cono circolare appuntito; questo, cambiando lungo l'asse del cono gradualmente la sua forma, raggiunge quindi la sezione ellittica richiesta [8]. Tuttavia per $\alpha \neq 0$ o $\psi \neq 0$, la soluzione del cono circolare appuntito comprende già la singolarità di entropia.

Nell'intento di ritrovare dunque una condizione iniziale per configurazioni generiche, si immagini che il corpo conico, ellittico nel presente caso, non si presenti né appuntito né a punta tozza, bensì troncato sul fronte con bordo di attacco spigoloso come nella carenatura di una presa dinamica di un motore per volo supersonico.

Anche nel caso di incidenza o di imbardata, la soluzione locale bidimensionale (urto su cuneo o espansione di P.M.) può essere facilmente individuata in ogni punto lungo il bordo spigoloso. Si può quindi definire un sottile strato d'urto, immediatamente a valle del suddetto bordo, ove il flusso sia in accordo con l'analisi locale (fig. 1).

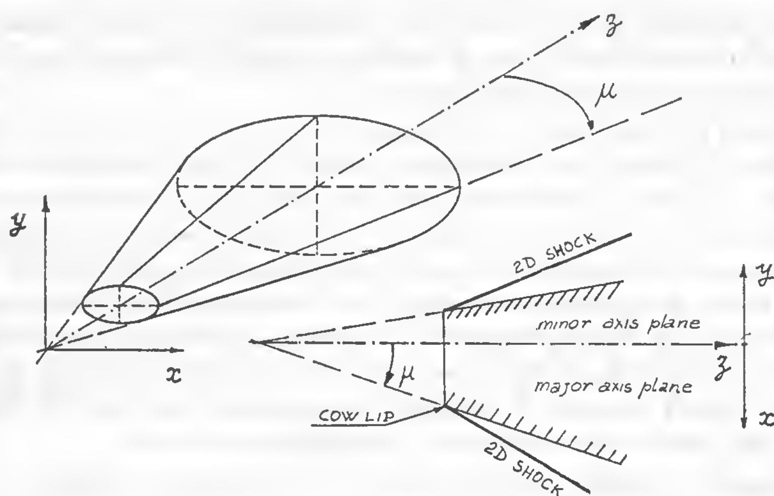


Fig. 1.

Un tal flusso nello strato d'urto, rappresenta una reale condizione fisica, non mostra forti variazioni di entropia (come nel caso a punta tozza) né tantomeno singolarità. L'integrazione delle equazioni del flusso tridimensionale porta alla configurazione conica con la conseguente graduale formazione delle singolarità di entropia.

Tale formulazione del problema appare conveniente ed è stata assunta nel presente lavoro. L'unico aspetto negativo deriva dal fatto che, per bassi numeri di Mach e coni alquanto aperti, la soluzione locale bidimensionale non ammette urti attaccati mentre questi sono consentiti nel corrispondente cono appuntito.

È opportuno ora discutere sulla scelta delle variabili e sul sistema di coordinate.

Scelta delle variabili.

Viene generalmente riconosciuto che le variabili cosiddette primitive (pressione, componenti della velocità, entropia) risultino le più idonee per la trattazione numerica (all'infuori del caso in cui si assumano algoritmi facenti ricorso a « shock capturing techniques » per flussi presentanti urti « imbedded »).

Dall'esperienza avuta in passato tuttavia [6], [7], [8] si può avere un diverso suggerimento. Osservando il flusso attraverso strati di entropia (sia quelli originati da punta tozza che quelli in prossimità di singolarità di entropia), si nota che i profili di pressione sono alquanto piatti; al contrario le componenti della velocità, essendo costante l'entalpia totale, presentano forti gradienti, in corrispondenza a quelli di entropia.

La difficoltà allora nel valutare correttamente le derivate delle componenti di velocità attraverso gli strati di entropia, conduce ad oscillazioni inaccettabili nei risultati numerici [8].

Si può però osservare che la pendenza delle linee di flusso in un piano meridiano [rapporto della componente radiale (u) sulla componente assiale (w) delle velocità] mostra andamento dolce attraverso lo strato di entropia, proprio come la pressione. La cosa non sorprende poiché il gradiente di pressione in tale direzione è certo più legato alla forma delle linee di flusso che ai profili delle singole componenti della velocità (u, w). Alcuni esempi per mostrare quali miglioramenti si possano conseguire integrando le pendenze (u/w) in luogo delle componenti (u, w) sono riportati in [8]. Nel presente lavoro la scelta di integrare la pendenza delle linee di flusso è stata pure estesa alla componente trasversale di velocità.

Maggiori dettagli, sia su tal punto che sui seguenti, possono essere ritrovati in [15].

Scelta delle coordinate.

I risultati numerici presentati in [8] per flusso supersonico su coni ellittici erano limitati al rapporto dei semiassi R pari a 3,2. Tale sembra pure essere il limite superiore relativo ai risultati presentati in letteratura [3], [4], [5], [9]. Allorché si cerca di ottenere risultati numerici per R maggiori questi diventano assolutamente insoddisfacenti.

Per comprendere le ragioni di tale limitazione penso sia opportuno mostrare alcuni risultati ottenuti con un codice simile a quello usato in [8]. In esso si fa ricorso a coordinate cilindriche e a pendenze di linee di flusso (rapporti delle componenti radiali e tangenziali di velocità alla componente assiale).

Si è dunque calcolato il flusso su un cono ellittico con $R = 2$. Il campo di pressione nello strato d'urto è diagrammato, sotto forma di isobare (p/p_∞) a sinistra nella fig. 2. Anche se il risultato appare soddisfacente, si

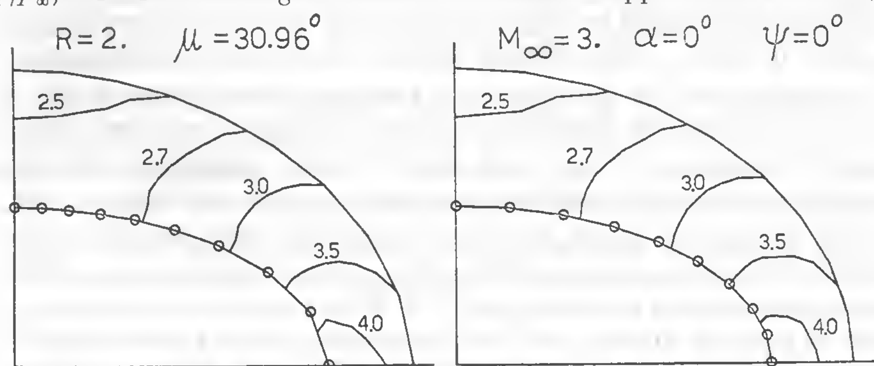


Fig. 2.

possono notare due punti sospetti. Oscillazioni numeriche appaiono vicino al corpo su qualche isobara ($p/p_\infty = 2{,}7 \div 3{,}0$) ed il corpo stesso viene descritto da un ristretto numero di punti (cerchi) nell'intorno del piano di simmetria contenente il semiasse maggiore (bordo d'attacco). Se poi si cerca di spingere il calcolo a $R = 3$, si può vedere come i problemi degenerino (lato sinistro della fig. 3). Le oscillazioni delle isobare ($p/p_\infty =$

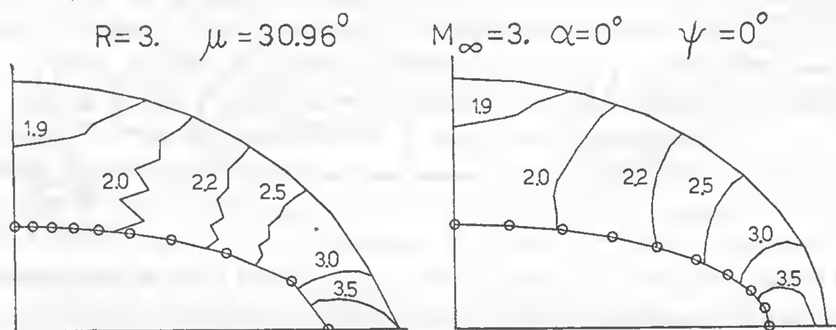


Fig. 3.

2,0 ÷ 2,5) sono ora notevoli e l'affidabilità dei risultati nell'intorno del bordo d'attacco, diventa discutibile per la scarsezza dei punti di calcoli con cui il corpo è descritto.

La distribuzione dei punti per tali calcoli è riportata in fig. 4. Se ne possono trarre alcune considerazioni. I punti sono concentrati nella porzione piatta dell'ellisse e troppo pochi si ritrovano vicino al bordo di attacco. Parebbe perciò auspicabile uno stiramento nella coordinata θ sì da invertire la concentrazione di punti data dalla maglia ad intervallo costante in θ. Inoltre, nell'intorno di $\theta \simeq 45^o$ si nota che le linee radiali sono ben lontane dal presentarsi normali al contorno del corpo. Personalmente penso che in tali problemi (di natura iperbolica), sia importante descrivere molto correttamente il meccanismo di riflessione delle onde di pressione al corpo, e tale fenomeno è strettamente legato ai gradienti di grandezze valutati sulla normale al contorno. È chiaro, come, con la griglia riportata in fig. 4, appaia difficile valutare correttamente tali gradienti.

Migliori griglie, da questi punti di vista, sono state assunte in [5], [9] ove si sono introdotte coordinate rettilinee normali al contorno. Meglio ancora è indicato in [10] ove, per geometrie più complicate, si è fatto ricorso a trasformazioni conformi per generare griglie più idonee.

Nel problema in esame, la scelta di coordinate ellittiche (un semplice esempio di trasformazioni conformi) sembra essere opportuna. La relativa distribuzione di punti è riportata in fig. 5. Molti punti sono ora concentrati vicino al bordo di attacco e le linee coordinate « radiali » sono normali al contorno (descritti qui da una linea coordinata della opposta famiglia).

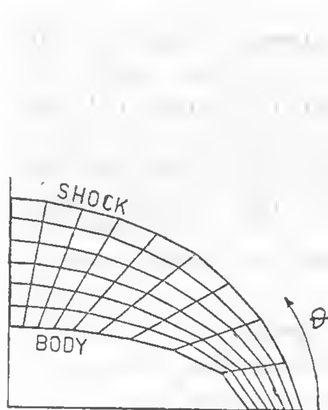


Fig. 4.

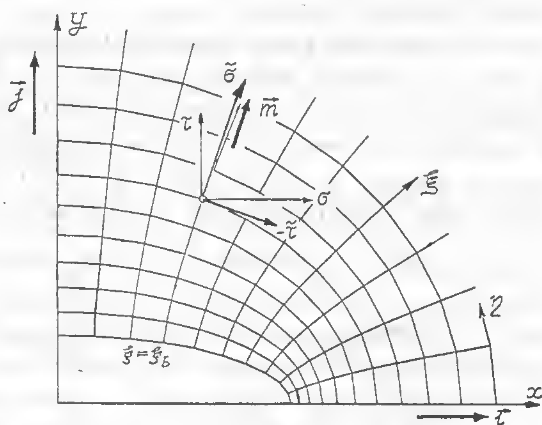


Fig. 5.

I dettagli relativi alla scrittura delle equazioni del moto in tale sistema di coordinate sono riportati in [15]. In breve, le equazioni di Eulero sono scritte in un sistema cartesiano (x, y contenuti nel piano normale all'asse

z del cono). Le pendenze delle linee di flusso, definite come rapporti delle componenti cartesiane di velocità (σ, τ), sono quindi introdotte come variabili (fig. 5).

Le equazioni sono quindi riscritte nel nuovo sistema di coordinate (le ellittiche ξ e η nel piano normale all'asse ζ del cono).

Infine si introduce una trasformazione ancora intesa a normalizzare le coordinate ξ fra i valori al corpo ed all'urto. Quando, in un primo tempo, cercai di svolgere dei calcoli integrando tali equazioni non ottenni i risultati sperati. In effetti le variabili prescelte (σ, τ) presentano ancora gradienti molto forti nello strato d'urto rendendo difficile la valutazione corretta delle derivate con una griglia relativamente a pochi punti.

Cercai perciò di essere più aderente alla scelta delle coordinate ellittiche introducendo le variabili $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$ (fig. 5) definite attraverso le componenti di velocità secondo ξ ed η. I risultati numerici risultarono a tal punto ben più soddisfacenti.

Gli stessi esempi riportati a sinistra della figg. 2 e 3 sono stati ricalcolati in base alle ultime indicazioni ed i relativi risultati riportati alla destra delle medesime figure. Le oscillazioni sono ora sparite ed il miglioramento, anche per quanto riguarda la descrizione dell'urto, è notevole.

A tal punto nasce la ragionevole speranza che si possano ottenere soddisfacenti risultati anche per maggiori valori di R.

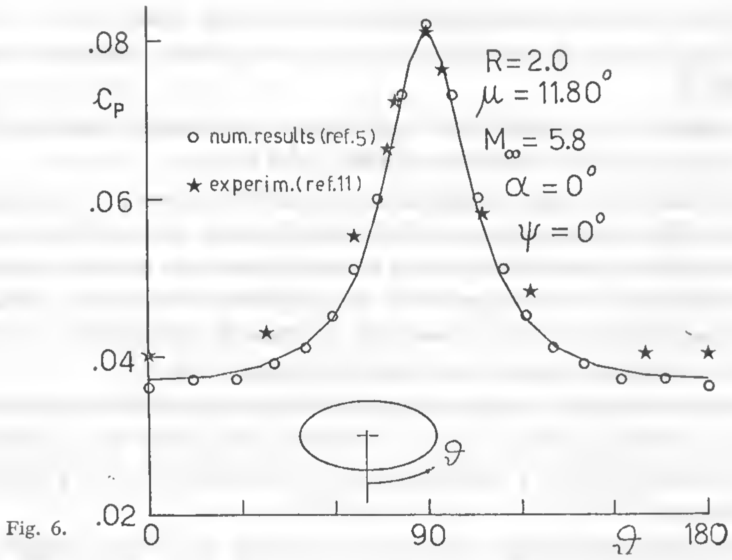
Alcuni confronti.

I risultati numerici ed i dati sperimentali sul flusso supersonico, su coni ellittici, riportati in letteratura, sono limitati a valori relativamente bassi di R.

Anche se interessato a flussi in presenza di elevati valori di R, penso però opportuno un confronto di risultati numerici ottenuti da altri autori (attraverso differenti metodologie) e di dati sperimentali, con quelli ottenuti dal mio codice. I confronti sono basati sulla distribuzione di pressione al corpo e sono mostrati nella sequenza di diagrammi da fig. 6 a fig. 12, ove le linee a tratto continuo rappresentano i miei risultati.

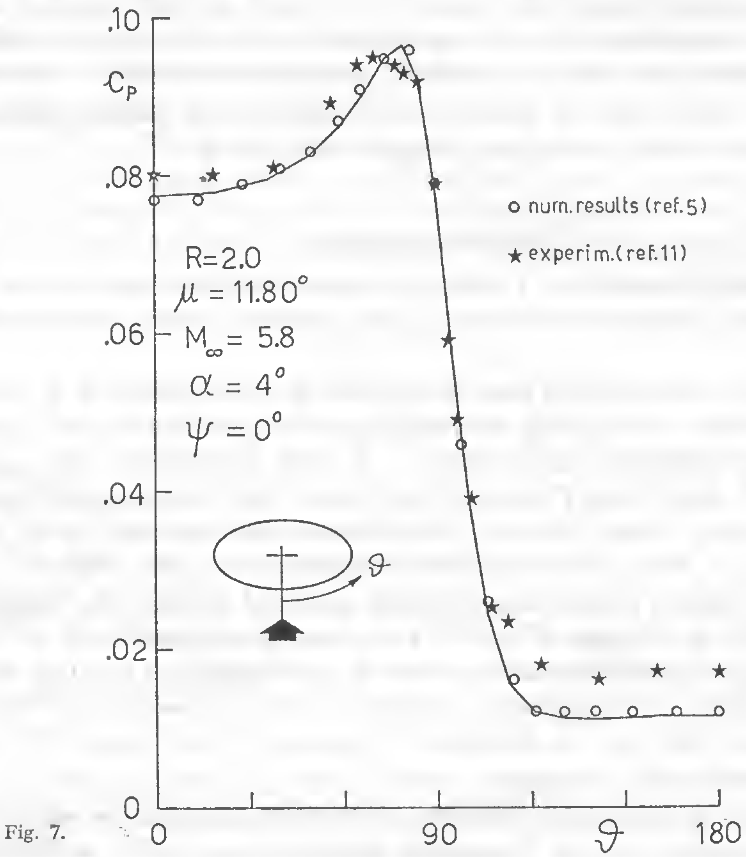
Molto buono l'accordo con i risultati numerici dati da [5] e riportati in figg. 6, 7, 8, nel caso di $R = 2$. Per ellisse più appiattita ($R = 3{,}68$, fig. 9), il lettore può ritrovare un'inizio di oscillazione nei risultati di [5] mentre la linea a tratto continuo sembra mostrare l'assenza di problemi. Ciò è messo ancor più in evidenza dal confronto della forma dell'urto, riportata in fig. 10.

In fig. 11 è riportato il confronto con risultati numerici forniti in [4], che pur per bassi valori di R, mostrano piccole ma percettibili oscillazioni.



.08
C_p
.06
.04
.02
0
90
ϑ
180
o num.results (ref.5)
★ experim.(ref.11)
R=2.0
μ = 11.80°
M_∞= 5.8
α = 0°
ψ = 0°
ϑ

Fig. 6.



.10
C_p
.08
.06
.04
.02
0
0
90
ϑ
180
o num.results (ref.5)
★ experim.(ref.11)
R=2.0
μ = 11.80°
M_∞= 5.8
α = 4°
ψ = 0°
ϑ

Fig. 7.

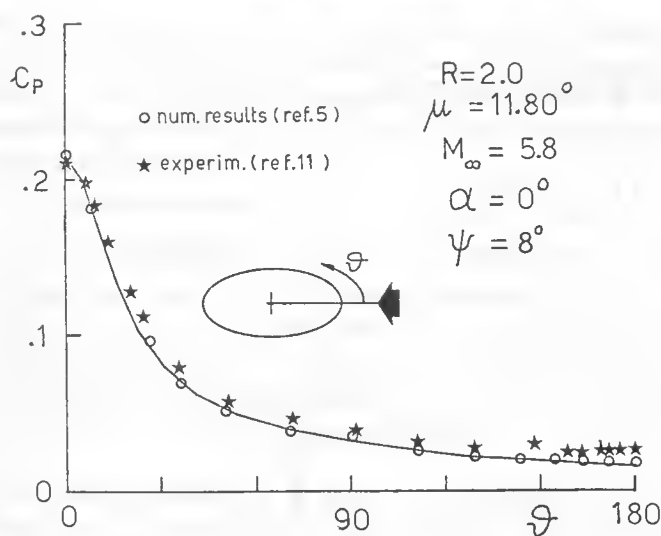


Fig. 8.

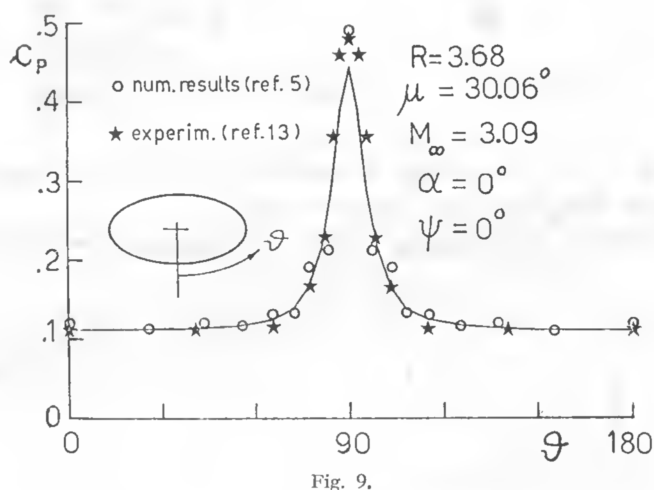


Fig. 9.

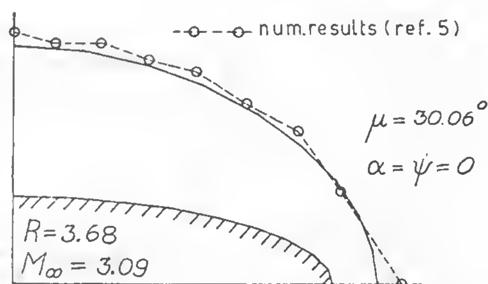


Fig. 10.

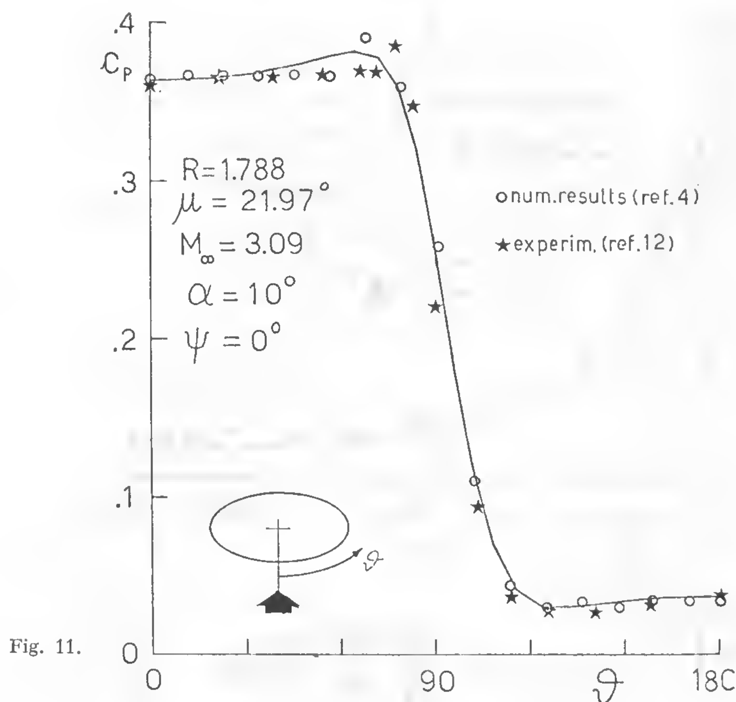


Fig. 11.

Infine in fig. 12 è riportato il confronto con soli dati sperimentali, per un angolo d'attacco relativamente grande.

Come riportato nelle figure, i dati sperimentali sono tratti da [11], [12], [13].

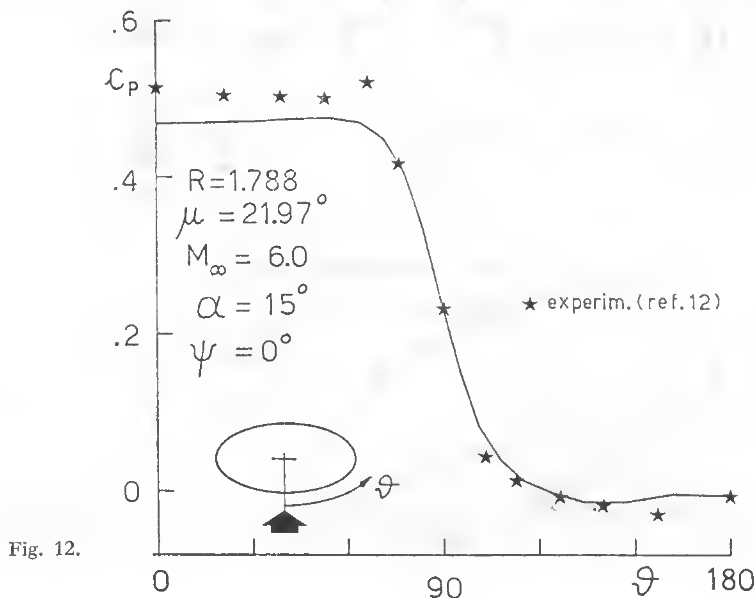


Fig. 12.

Il fatto che, a bassi valori di R, sussista un ottimo accordo fra i miei ed altri risultati numerici, rappresenta un buon controllo del mio codice. In particolare sono da notare i risultati senza alcuna oscillazione per $R = 3{,}68$, che rappresenta il limite superiore di ellitticità per risultati riportati in letteratura.

Flusso su coni ellittici ad elevato rapporto dei semiassi.

Si intende qui mostrare l'evoluzione del campo di pressione nello strato d'urto in coni con ellitticità variabile e crescente sino ad elevati valori di R. Si è considerato il caso con $\alpha = \psi = 0$ per coni con apertura costante nel piano di simmetria contenente il semiasse maggiore (angolo μ in fig. 1) e numero di Mach costante. Le figg. 13, 14, 15, 16 mostrano i risultati.

Nel caso banale di $R = 1$, il flusso risulta assialsimmetrico e sia il corpo e l'urto, che le isobare nello strato d'urto si presentano come cerchi concentrici. Nei casi di $R = 2$ e $R = 3$ (figg. 13, 14) il flusso è ormai lon-

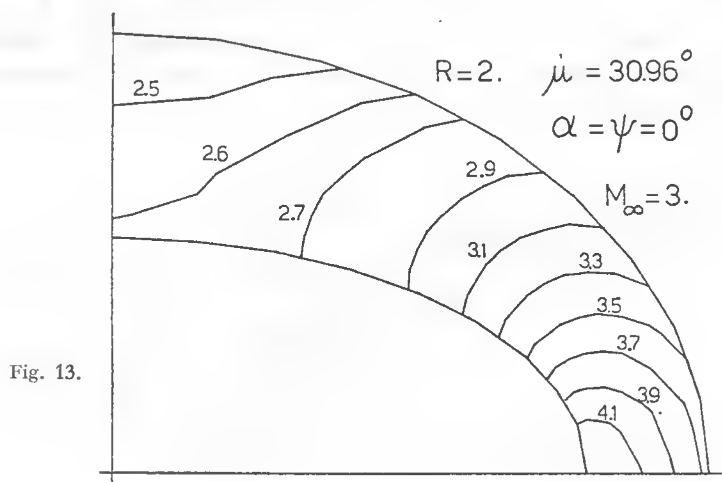


Fig. 13.

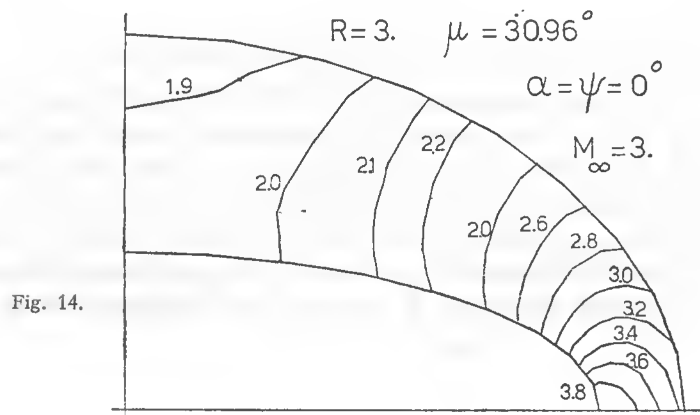


Fig. 14.

tano dalle condizioni di assialsimmetria e comincia a svilupparsi una regione a pressione costante all'intorno del piano di simmetria contenente il semiasse minore. Si nota pure l'espansione attorno al bordo di attacco. Per $R = 5$ (fig. 15) la regione a pressione costante si estende, la pressione ivi tende a diminuire, e l'espansione al bordo di attacco diventa notevole.

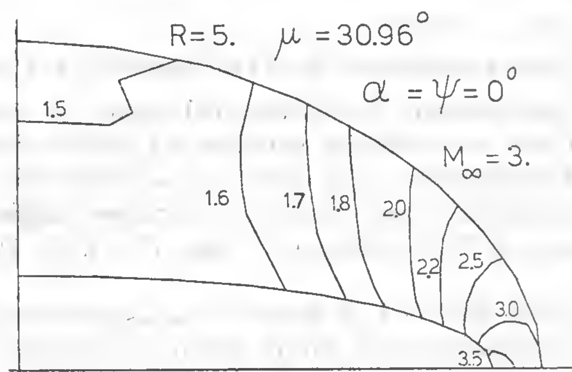


Fig. 15.

Per $R = 10$ infine (fig. 16) il cono è molto appiattito. Una ampia porzione dello strato d'urto è a pressione bassa e costante e l'espansione suddetta è decisamente forte.

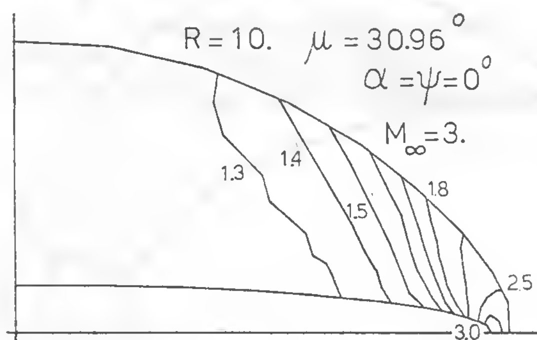


Fig. 16.

Effetti degli angoli di incidenza ed imbardata.

Molti esempi di calcolo sono riportati in [3], [4], [5], [9] nel caso di pura incidenza ($\alpha \neq 0$; $\psi = 0$). Due peculiarità distinguono questi flussi. Una è legata ai punti di sorgente di entropia (punti di ristagno per il flusso trasversale). All'aumentare dell'incidenza tali punti si scostano dal piano di simmetria del semiasse maggiore e si spostano nel lato del cono al vento. Ad elevata incidenza e per bassi R questi punti possono confondersi con la singolarità di entropia sul piano di simmetria del semiasse minore al

vento. Tale andamento è chiaramente illustrato in [9] dove però, causa il flusso trasversale supersonico, solo una limitata porzione dello strato d'urto è calcolata. La seconda peculiarità è fornita dalla forte espansione al corpo sul lato sotto vento, seguita da una ricompressione proprio prima di raggiungere il piano di simmetria del semiasse minore, come messo in evidenza in [3]. Da esperimenti numerici si può riconoscere che tale ricompressione degenera in un urto trasversale per incidenze superiori al semiangolo di apertura del cono, nel piano di simmetria del semiasse minore.

Ho calcolato alcuni di tali flussi, per un determinato cono allo stesso numero di Mach e diverse incidenze.

I risultati sono diagrammati nelle figg. 17, 18, 19. Qui sono, a sinistra, riportate le isobare nello strato d'urto, ed a destra, le linee di flusso. Si

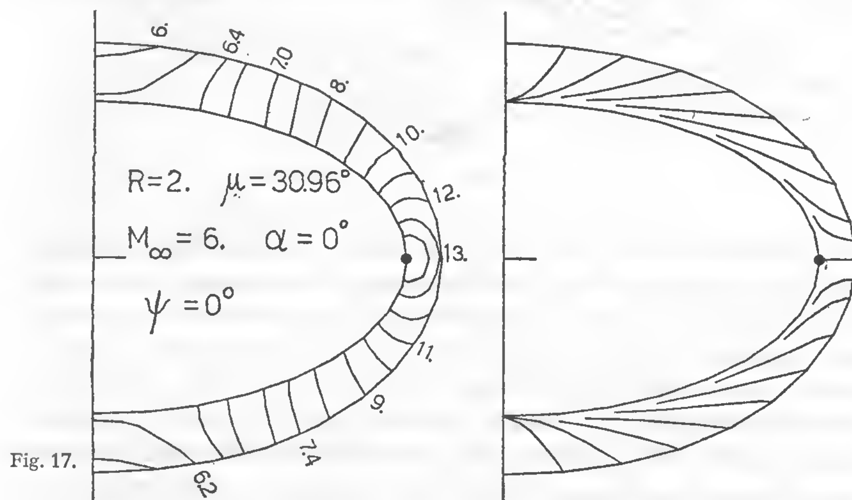


Fig. 17.

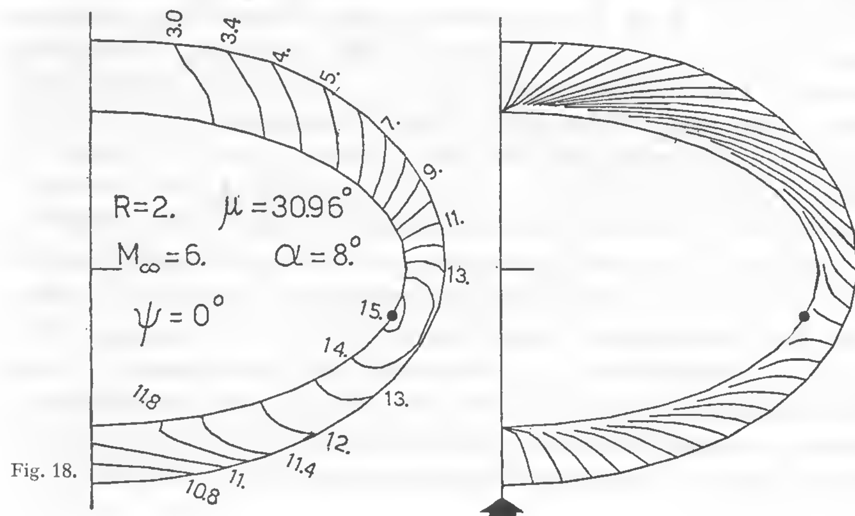


Fig. 18.

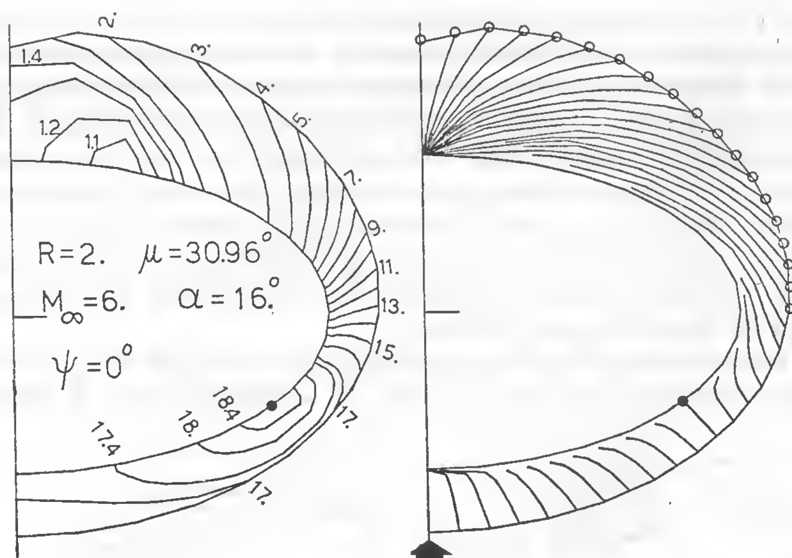


Fig. 19.

nota che la distribuzione della pressione non è molto alterata dalla incidenza nel lato esposto al vento, ma, sottovento, essa appare molto sensibile. In particolare la leggera ricompressione messa in evidenza in fig. 19 degenera rapidamente in un urto trasversale per incidenza poco maggiore. Al pari, la forma delle linee di flusso risulta molto sensibile all'incidenza nella regione sottovento. La diversa posizione con α dei punti di sorgente di entropia (punti neri) è pure posta in evidenza nelle suddette figure.

Una ulteriore caratteristica emerge, in tali flussi, a relativamente alta incidenza, dalla descrizione dell'urto vicino al piano di simmetria contenente il semiasse minore. In fig. 19 si osserva chiaramente come l'urto tenda qui a scendere verso il corpo. A causa della griglia impiegata, relativamente grossolana, il calcolo relativo alla fig. 19 è stato rifatto, raddoppiando solamente il numero di punti nella direzione trasversale, per controllare se tale tendenza fosse da imputare alla scarsità di punti di calcolo. La posizione dell'urto ne è risultata praticamente invariata come indicano i cerchi sulla fig. 19, riportati solamente nella parte superiore per semplicità.

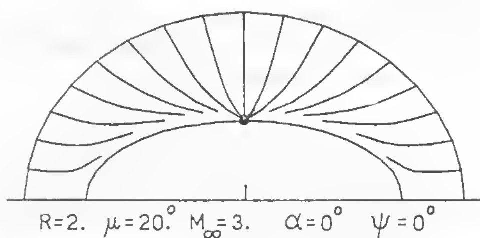
D'altra parte, pure in [3] si ritrova un andamento simile per coni ellittici e lo stesso andamento è dato dai risultati di [5], [14] per coni circolari.

Gli effetti dell'imbardata sono studiati in [5], con riferimento all'influenza di ψ nell'andamento delle linee di flusso. All'aumentare di tale angolo, le singolarità di entropia, si discostano dal piano del semiasse minore per tendere al punto di sorgente sottovento. Ad elevati ψ tali punti confluiscono sul piano di simmetria del semiasse maggiore, sottovento.

Ho svolto dei calcoli per un determinato cono a prefissato numero di Mach e diversi valori di ψ. Nella parte inferiore delle figg. 20, 21, 22, 23 sono riportate le isobare, mentre superiormente l'andamento delle linee di flusso. Le leggere oscillazioni nelle isobare sono imputabili alla griglia alquanto grossolana; raddoppiando i punti di calcolo nella direzione radiale, esse diventano trascurabili. Lo spostamento delle singolarità di entropia (punti neri) è messo bene in evidenza.

Nella sequenza da fig. 17 e fig. 23, l'andamento delle linee di flusso è così stato calcolato: una funzione ausiliaria F viene definita e descritta dalla stessa equazione, di natura convettiva, usata per l'entropia.

Le condizioni al contorno per F, all'urto, sono poste attribuendo ad F il valore in corrispondenza della coordinata trasversale (η). Allorché si rag-



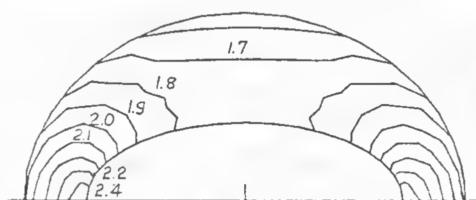
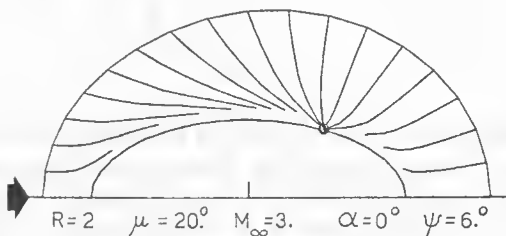


Fig. 20.



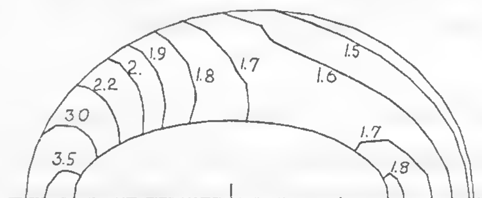


Fig. 21.

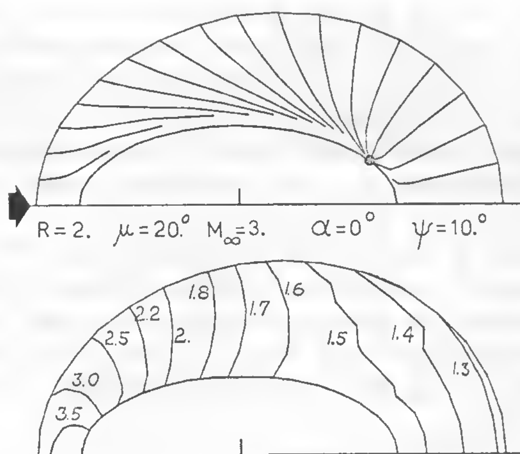


Fig. 22.

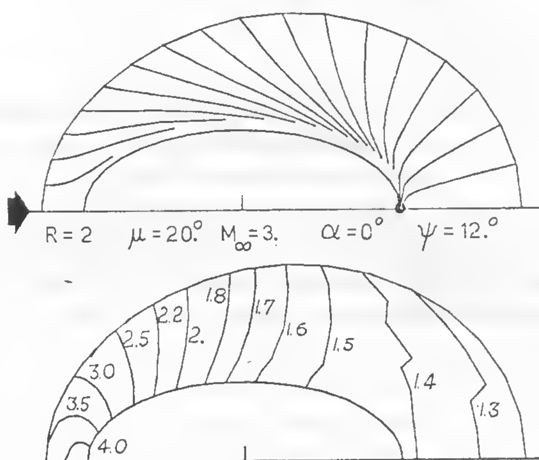


Fig. 23.

giunge la configurazione conica, le linee a costante valore di F, rappresentano pure linee di flusso, al pari delle linee ad entropia costante. Tuttavia l'entropia presenta forti gradienti in qualche regione e trascurabili valori in altre, mentre la distribuzione di F è più regolare. Sembra perciò più accurata la valutazione delle linee di flusso ottenuta attraverso l'integrazione di F.

Numero dei punti di calcolo e tempi di calcolo.

I risultati numerici presentati in tale lavoro, sono stati ottenuti con una griglia alquanto grossolana. Nella direzione trasversale (lungo η) si sono usati 18 intervalli (solo 9 per $\alpha = \psi = 0$).

Nella direzione radiale (lungo ξ) ne sono stati imposti 4 nei primi stadi dell'integrazione e quindi 8 per ottenere una migliore accuratezza nei risultati finali. Va però messo in evidenza come i risultati ottenuti con soli 4 intervalli radiali non si discostino apprezzabilmente da quelli ottenuti con intervalli dimezzati.

I tempi C.P.U. di calcolatore dipendono dalla configurazione geometrica. Il tempo più elevato è stato necessario per $R = 10$ ($\alpha = 0$, $\psi = 0$), ed ammonta a 2,5 minuti su di una C.D.C. 6600; metà del tempo è sufficiente per $R = 3$. Nel caso di $\alpha \neq 0$ o $\psi \neq 0$ tali tempi ovviamente raddoppiano.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ferri A., « Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack », NACA Report n. 1045 (1951).
[2] Babenko K. I. et al., « Three Dimensional Flow of Ideal Gas Past Smooth Bodies », NASA TT F-380 (1966).
[3] Gonidou R., « Ecoulements Supersoniques Autour de Cônes en Incidence », ONERA, La Recherche Aerospatiale, n. 120 (1967).
[4] Jones D. J., « Numerical Solutions of the Flow Field for Conical Bodies in a Supersonic Stream », National Research Council of Canada, Aeronautical Report, LR-507 (1968).
[5] Klunker E. B., South J. C., and Davis R. M., « Calculation of Non-linear Conical Flows by the Method od Lines », NASA TR-R-374 (1971).
[6] Moretti G., and Pandolfi M., « Analysis of the Inviscid Flow about a Yawed Cone-Preliminary studies ». Polytechnic Institute of Brooklyn, PIBAL Report n. 72-18 (1972).
[7] Moretti G., and Pandolfi M., « Entropy Layers », Computers and Fluids, vol. 1 (1973).
[8] Pandolfi M., « Numerical Analysis of the Supersonic Flow about Elliptical Cones », Aerotecnica, Missili e Spazio, n. 1 (1975).
[9] Vetlutskii V. N. and Ganimedov V. L., « The Supersonic Flow Around a Sharp-Nose Elliptic Cone at Angle of Attack », Archives of Mechanics, Polish Academy of Science, vol. 26 (1974).
[10] Marconi F. and Salas M., « Computation of three Dimensional Flows about Aircraft Configurations », Computers and Fluids, vol. 1 (1973).
[11] Chapkis R. L., « Hypersonic Flow Over an Elliptical Cone: Theory and Experiment », Journal of the Aerospace Sciences (1961).
[12] Zakkay V. and Visich Jr. M., « Experimental Pressure Distribution on Conical Elliptical Bodies at $M_\infty = 3.09$ and 6.0 », Polytechnic Institute of Brooklyn, PIBAL Report n. 467 (1959).
[13] Martellucci A., « An Extension of the Linearized Characteristics Method for Calculating the Supersonic Flow Around Elliptic Cones », Journal of the Aerospace Sciences (1960).
[14] Jones D. J., « Tables of Inviscid Supersonic Flows about Circular Cones at Incidence », ARGA Dograph 137.
[15] Pandolfi M., « Supersonic Flow About Elliptic Cones With Large Semiaxis Ratio », Report n. 172 - Istituto di Macchine, Politecnico di Torino - December 1975.

G. PEZZOLI (*)

L'azione dei mezzi stratificati sulla propagazione delle onde nei liquidi.

Riassunto. — *In questa nota è stata presa in esame l'azione di stratificazioni sottili superficiali in mezzi liquidi, in particolare acqua.*

Lo studio è stato condotto essenzialmente per mostrare come sottili strati superficiali a forte viscosità, depositati sopra estese masse d'acqua, esercitino una azione che modifica intensamente le caratteristiche dei moti ondosi, diminuendo fortemente, in particolare, le velocità di trasporto associate alle onde e diminuendo quindi, di conseguenza, le capacità autodepuranti di mari o lagune inquinate ad esempio da veli di idrocarburi.

Lo studio delle onde nei liquidi in tutti i suoi più vari aspetti, sia che si tratti di studiare la propagazione pura e semplice dell'onda, sia che si tratti di studiare il trasporto di massa o l'azione al fondo su mezzi incoerenti mobili, è stata da oltre un secolo a questa parte, uno degli argomenti fondamentali di tutti gli idraulici ed idrodinamici, tanto se i problemi in questione erano trattati nello schema di liquido perfetto che in quella di liquido viscoso e con varie approssimazioni e svariate condizioni al contorno nonché nella forma del campo.

Anche lo studio dell'azione dei moti ondosi sui liquidi stratificati ha avuto fin dai tempi di Stokes notevoli contributi, sebbene in maniera minore, per via della minore importanza pratica dei problemi a cui questo schema si riallacciava.

Scopo di questa nota non è soltanto quello di riprendere alcuni dei risultati più significativi della teoria delle onde nei mezzi stratificati, ma *di applicarla ad un problema che ha un notevolissimo interesse pratico ed* applicativo particolarmente significativo ai nostri giorni.

Si tenga presente che modifiche anche modeste nella struttura di un mezzo fluido, ad esempio il passaggio del mezzo stesso da monofase a bifase, e per bifase ovviamente intendiamo qui anche una miscela di più liquidi

(*) Politecnico di Torino.

sovrapposti e stratificati, comporta sostanziali cambiamenti, sia nel modo di propagarsi delle onde alla superficie, sia soprattutto nelle correnti di trasporto di massa associate ai moti ondosi stessi.

Si pensi ad esempio ad un mezzo liquido assegnato, acqua nel nostro caso, in cui si propagano onde generate da una certa causa perturbante, e si supponga ora che questi moti ondosi investano una zona in un campo di moto in cui le condizioni iniziali del liquido siano alterate dalla presenza di uno strato di altro fluido.

Ci riferiamo alla possibilità della presenza in mare inizialmente pulito di chiazze che possono essere estese per chilometri, di idrocarburi o materiali similari, dovute a fatti di vario genere connessi con la tecnologia dei medesimi, quali scarichi industriali, o anche dovuti a perdite di oleodotti nonché ad affondamenti di navi petroliere.

Si ponga inoltre l'attenzione sul fatto che spessori anche piccolissimi di materiali grassi modificano sostanzialmente le proprietà fisiche di superficie dell'acqua di mare, dei laghi, dei fiumi. In questa maniera si cambiano tutte le caratteristiche delle propagazioni ondose e delle correnti ad esse associate, spesso con grave danno dell'ambiente, in quanto le correnti stesse vengono, come vedremo in seguito, rallentate dalla presenza di queste macchie inquinanti e la diminuzione della velocità delle particelle che così ne deriva, fa sì che la dispersione e successiva distruzione dei campi inquinanti sia estremamente più lenta.

Vediamo ad esempio quali conseguenze si ricavano, nello studio di prima approssimazione, vale a dire con onde lineari, quando si ha a che fare con la propagazione di moti ondosi da una zona in cui vi è acqua pulita ad una zona in cui vi è uno strato inquinante sottile, ad esempio un velo di idrocarburi o altre sostanze oleose deposto sulla superficie dell'acqua.

Esaminiamo il comportamento di un'onda che si propaga da una zona di liquido monofase (mare pulito) ad una ove sono presenti acque stratificate, in cui lo strato superiore abbia, per il momento, spessore qualsiasi.

È ben nota la soluzione lineare di moto ondoso bidimensionale irrotazione a superficie libera in un liquido omogeneo e profondità costante; richiamiamo brevemente la corrispondente soluzione per il moto in liquidi stratificati.

Detto h_1, lo spessore dello strato superiore a pelo libero, h_2 quello dello strato inferiore, si possono scrivere le seguenti espressioni per i potenziali di velocità:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = (A \operatorname{ch} mz + B \operatorname{sh} mz) \cos m(x - ct) \\ \varphi_2 = C \operatorname{ch} m(z + h_2) \cos m(x - ct) \end{cases}$$

dove $m = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda e c la velocità di propagazione; A, B, C tre costanti.

L'origine delle z è presa sul livello di riposo dell'interfaccia, per cui le condizioni al contorno e all'interfaccia stessa sono:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} & (\text{per } z = h_1) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 & (\text{per } z = -h_2) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} & (\text{per } z = 0) \\[2ex] p_1 = p_2 & (\text{per } z = 0) \end{cases}$$

La prima delle (2) è la consueta condizione di Poisson, la seconda e la terza impongono che non vi sia distacco tra i liquidi all'interfaccia e sul fondo, mentre la quarta stabilisce, sempre all'interfaccia, l'uguaglianza delle pressioni.

Il rispetto delle (2) assegnati i potenziali (1), con semplice eliminazione delle costanti A, B, C porta alla condizione.:

$$(3) \qquad z^2(\varrho_2 C_1 C_2 + \varrho_1 S_1 S_2) - z\varrho_2(C_1 S_2 + C_2 S_1) + (\varrho_2 - \varrho_1) S_1 S_2 = 0$$

essendo

$$(4) \qquad z = \frac{mc^2}{g}\,, \quad S_n = \operatorname{sh} mh_n\,, \quad C_n = \operatorname{ch} mh_n$$

L'equazione (3) mostra, come è noto, la duplicità dei sistemi d'onde risultanti, le così dette onde « normali » e le onde « anomale ».

Dato che noi consideriamo sempre molto piccolo h_1, dalla (3) si trae facilmente:

$$(5) \qquad z^2\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} mh_1 \operatorname{tgh} mh_2\right) - z(\operatorname{tgh} mh_2 + mh_1) + \\ + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) mh_1 \operatorname{tgh} mh_2 = 0$$

La (5) per $h_1 \rightarrow 0$ tende al risultato classico

$$(6) \qquad z = \operatorname{tgh} mh_2$$

vale a dire che si torna all'onda in liquido monofase; conviene ora distinguere due casi, quello delle acque molto profonde e quello invece delle acque basse, ovvero delle onde lunghe rispetto alla profondità, caso che rispecchia il moto presso le coste.

Se la profondità dell'acqua h_2 è grande (alto mare), allora la (5) si semplifica in

$$z^2\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} mh_1\right) - z(1 + mh_1) + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)mh_1 = 0 \tag{7}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = mh_1 \dfrac{1 - \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}}{1 + \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2} mh_1} \end{cases} \tag{8}$$

che mostrano, che nello schema adottato l'onda ordinaria coincide con l'onda d'alto mare in liquido monofase, mentre quella anomala, data la piccolezza di h_1 e di $1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, ha velocità di propagazione e quindi anche energia trascurabile.

In acque basse, cioè in prossimità della riva, la (5) fornisce invece:

$$z^2\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} m^2h_1h_2\right) - mz(h_1 + h_2) + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)m^2h_1h_2 = 0 \tag{9}$$

le cui soluzioni, trascurando termini piccolissimi rispetto a quelli conservati, sono:

$$\begin{cases} z_1 \simeq mh_2\left(1 + \dfrac{h_1\varrho_1}{h_2\varrho_2}\right) \\ z_2 \simeq mh_1\left(1 - \dfrac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \end{cases} \tag{10}$$

Ricordando la 1ª delle (4), cioè $z = \frac{mc^2}{g}$, le (10) mostrano che l'onda ordinaria ha celerità maggiore di $\sqrt{gh_2}$ di una quantità insignificante, mentre l'onda anomala anche in questo caso possiede celerità ed energia pressoché nulle.

Questa analisi mostrerebbe quindi che un velo liquido sottile sovrapposto ad altro liquido di notevole profondità, non dovrebbe sostanzialmente modificare il fenomeno ondoso quale si ha nel liquido omogeneo.

Il tipo di conclusione al quale ora si è giunti, non sembra però rispecchiare molto bene l'andamento dei fenomeni citati, che essendo strettamente legati all'esistenza di una superficie libera, non possono evidentemente non tener conto della presenza della tensione superficiale, mentre invece risulta irrilevante all'analisi la viscosità del fluido che agisce solo nello strato limite, estremamente sottile, al fondo.

Per non complicare inutilmente i calcoli, schematizziamo il sistema bifase in esame, il cui strato superiore è sottilissimo, con un liquido omogeneo soggetto all'azione di una distribuzione di forze superficiali; in effetti la pellicola sottilissima che si forma alla superficie, pur avendo in generale la proprietà di abbassare la tensione superficiale dell'acqua, come risulta dalle misure statiche, in effetti durante il moto si comporta come se esercitasse una azione equivalente ad una forte tensione superficiale fittizia che si esplica solo durante il movimento.

È noto l'effetto attenuatore dell'olio sulle onde di mare; lo studio eseguito da Reynolds fu dallo stesso ritenuto poco soddisfacente ed abbandonato. I risultati, riportati per esteso nella 2ª edizione dell'Hydrodinamics, nelle successive edizioni sono appena accennati e non appaiono per nulla convincenti.

Non compaiono in essi infatti né lo spessore dello straterello superficiale, né la viscosità del liquido costituente il velo, elementi invece fondamentali per la comprensione meccanica del fenomeno.

Il fenomeno stesso non fu in seguito più considerato e studiato per l'inutilità che sembrava dimostrare; oggi mi pare sia tornato di grande attualità e valga quindi la pena di spendere qualche parola su di esso.

Tuttavia per il momento limitiamoci a considerare un liquido generico sulla cui superficie vi sia una tensione superficiale τ; se h è la profondità del liquido ed il moto è irrotazionale, con le solite notazioni risulta per il potenziale di velocità:

$$\varphi = D \operatorname{ch} mz \sin m(x - ct) \tag{11}$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{\tau}{\varrho} \dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2} & (z = h) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 & (z = 0) \end{cases} \tag{12}$$

La presenza del termine contenente la costante di capillarità τ a secondo membro della 1ª delle (12), proviene dal fatto che la pressione p non è più, sulla superficie, eguale alla sola pressione di riferimento p_0, ma è data da

$$p = p_0 - \frac{\tau}{R} \tag{13}$$

dove R è il raggio di curvatura principale (l'altro essendo infinito) dell'onda piana.

Considerando piccole le curvature e detto η lo spostamento verticale della particella, risulta subito:

$$p = p_0 - \tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{14}$$

per cui ricordando che nell'approssimazione fatta è

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \simeq \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{15}$$

è anche

$$\frac{\partial p}{\partial t} \simeq -\tau \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2} \tag{16}$$

e quindi ne discende la 1ª delle (12).

Dalle (11) e (12) risulta che la velocità di propagazione delle onde è

$$c = \sqrt{\frac{g}{m} \operatorname{tgh} mh \left(1 + \frac{\tau m^2}{\gamma}\right)} \tag{17}$$

mentre detta a l'ampiezza totale dell'onda, dalla (15) si ricava subito

$$D = \frac{ac}{2 \operatorname{sh} mh} \tag{18}$$

secondo il ben noto risultato delle onde irrotazionali classiche, salva la diversa determinazione di c.

Vediamo ora dalla (17) e dalla relazione di costanza del periodo dell'onda, legato alle condizioni meccaniche di generazione delle onde stesse, come varia la lunghezza d'onda in un liquido in cui, a parità di altre caratteristiche varii la tensione superficiale da τ_1 a τ_2.

Deve essere

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1} \tag{19}$$

e quindi, con qualche passaggio:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{tgh} m_2 h \left(1 + \frac{\tau_2 m_2^2}{\gamma}\right)}{\operatorname{tgh} m_1 h \left(1 + \frac{\tau_1 m_1^2}{\gamma}\right)} \tag{20}$$

Posto ora

$$(21) \qquad \frac{m_2}{m_1} = x\,, \qquad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \delta\,, \qquad m, h = \alpha\,, \qquad \frac{\tau_1 m_1^2}{\gamma} = \beta$$

si ottiene:

$$(22) \qquad \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{tgh} \alpha x}{\operatorname{tgh} \alpha} \frac{1 + \delta\beta x^2}{1 + \beta}$$

Questa equazione trascendente potrebbe essere risolta numericamente di volta in volta; è però più semplice renderci conto dell'andamento di x nei due casi limite.

In acque basse la (22) diviene:

$$(23) \qquad \frac{1}{x} = x \frac{1 + \delta\beta x^2}{1 + \beta}$$

equazione biquadratica la cui soluzione accettabile, trascurato un termine in β^2 è:

$$(24) \qquad x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\beta\delta}}{2\beta\delta}}$$

e quindi il rapporto $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ vale:

$$(25) \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2\beta\delta}{\sqrt{1 + 4\beta\delta} - 1}}$$

che per $\beta\delta \to 0$ tende ovviamente a 1 e per $\beta\delta$ molto grande tende invece a $(\beta\delta)^{1/4}$; la lunghezza tende dunque a crescere, all'aumentare della tensione superficiale.

In acque profonde la (22) fornisce:

$$(26) \qquad \frac{1}{x} = \frac{1 + \delta\beta x^2}{1 + \beta}$$

che nello stesso ordine di approssimazione visto dianzi, dice che per

$\beta\delta \to 0$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$, mentre per $\beta\delta \to \infty$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \to (\beta\delta)^{1/3}$.

La lunghezza d'onda cresce quindi in entrambi i casi all'aumentare di τ, ma in alto mare cresce più rapidamente che in acqua di piccola profondità, e quindi in prossimità della riva.

Esaminiamo ora le variazioni di ampiezza dell'onda al passaggio dal fluido omogeneo al fluido stratificato (strato superficiale sottile); la profondità è supposta costante.

Ricordando che il flusso di energia di un'onda per unità di tempo attraverso una sezione è dato da

$$F = \frac{\pi\gamma a^2}{8\,m}\left(1 + \frac{2\,mh}{\mathrm{sh}\,2\,mh}\right)\left(1 + \frac{m^2\tau}{\gamma}\right) \tag{27}$$

dove a è l'ampiezza totale dell'onda e il secondo termine contenuto nella seconda parentesi tiene conto dell'azione della tensione superficiale, eguagliando i flussi di energia attraverso due sezioni eguali, otteniamo

$$\frac{a_1^2}{m_1}\left(1 + \frac{2\,m_1 h}{\mathrm{sh}\,2\,m_1 h}\right)\left(1 + \frac{m_1^2\,\tau_1}{\gamma}\right) = \frac{a_2^2}{m_2}\left(1 + \frac{2\,m_2 h}{\mathrm{sh}\,2\,m_2 h}\right)\left(1 + \frac{m_2^2\,\tau_2}{\gamma}\right) \tag{28}$$

che deve essere associata alla (20).

Conviene anche qui riferirci separatamente ad onde lunghe o brevi; con le (21), e introdotte le ulteriori notazioni

$$y = \frac{a_2}{a_1}\,, \qquad \delta\beta = \varepsilon = \frac{\tau_2\,m_1^2}{\gamma} \tag{29}$$

ritenendo trascurabile, come in effetti è, β, la (28) diventa:

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1 + \dfrac{2\,\alpha}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha}}{\left(1 + \dfrac{2\,\alpha x}{\mathrm{sh}\,2\,\alpha x}\right)\left(1 + \varepsilon x^2\right)} \tag{30}$$

che per onde lunghe dà immediatamente

$$\frac{y^2}{x} = \frac{1}{1 + \varepsilon x^2} \tag{31}$$

che insieme alla (23), scritta nella forma

$$\frac{1}{x} = x(1 + \varepsilon x^2) \tag{23$'$}$$

ci indica che è:

$$y^2 = x^3\,, \qquad \frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3/2} \tag{32}$$

Per onde d'alto mare (onde brevi), si ottiene ancora la (31), che ora però va associata alla (26)

(26′)
$$\frac{1}{x} = 1 + \varepsilon x^2$$

Ne risulta:

(33)
$$y = x\,, \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Tanto l'ampiezza dell'onda, quanto la sua lunghezza influiscono sensibilmente sulla velocità di trasporto di massa in superficie, cioè sulla velocità, massima alla superficie stessa, della corrente associata a ciascun sistema ondoso, e avente la stessa direzione della propagazione.

Per cose note, che qui riteniamo superfluo richiamare, si trova in seconda approssimazione che la distribuzione nella sezione della velocità di trasporto $\bar{u}$, è:

(34)
$$\bar{u} = \frac{a^2 m^2 c}{16} \frac{\operatorname{ch} 2\,mz}{\operatorname{sh}^2 mh}$$

espressione che assume sul pelo libero il suo valore massimo $\bar{\bar{u}}$ pari a

(35)
$$\bar{\bar{u}} = \frac{a^2 m^2 c}{16} \frac{\operatorname{ch} 2\,mh}{\operatorname{sh}^2 mh}$$

Indicando sempre con l'indice 2 le grandezze relative al liquido stratificato, e con l'indice 1 quelle che competono al liquido omogeneo, abbiamo

(36)
$$\frac{\bar{\bar{u}}^2}{\bar{\bar{u}}_1} = \frac{a_2^2\, m_2^2\, c_2}{a_1^2\, m_1^2\, c_1} \frac{\operatorname{ch} 2\, m_2 h}{\operatorname{ch} 2\, m_1 h} \frac{\operatorname{sh}^2 m_1 h}{\operatorname{sh}^2 m_2 h}$$

che per onde lunghe fornisce, viste le (19) e (32)

(37)
$$\frac{\bar{\bar{u}}_2}{\bar{\bar{u}}_1} = x^2$$

mentre per onde brevi dà:

(38)
$$\frac{\bar{\bar{u}}_2}{\bar{\bar{u}}_1} = x^3$$

Nelle tabelle I e II sono riportati, al variare di $\varepsilon = \frac{\tau_2 m_1^2}{\gamma}$, i valori di $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{\bar{\bar{u}}_2}{\bar{\bar{u}}_1}$ rispettivamente per onde lunghe e brevi.

TABELLA I (*onde lunghe*).

ε	λ_2/λ_1	a_2/a_1	$\bar{\bar{u}}_2/\bar{\bar{u}}_1$
0	1	1	1
0,2	1,0820	0,8884	0,8541
0,4	1,1429	0,8184	0,7655
0,6	1,1925	0,7679	0,7032
0,8	1,2348	0,7288	0,6559
1,0	1,2720	0,6970	0,6180
1,5	1,3501	0,6375	0,5486

TABELLA II (*onde brevi*).

ε	λ_2/λ_1	a_2/a_1	$\bar{\bar{u}}_2/\bar{\bar{u}}_1$
0	1	1	1
0,2	1,1510	0,8688	0,6558
0,4	1,2542	0,7973	0,5068
0,6	1,3362	0,7484	0,4192
0,8	1,4053	0,7116	0,3604
1,0	1,4656	0,6823	0,3176
1,5	1,5918	0,6282	0,2479

Naturalmente la più significativa di queste tabelle è la II, dato che l'azione capillare si fa sentire più intensamente sulle onde brevi per le quali il termine $\frac{\tau_2 m_2}{\gamma}$ può assumere valori sensibili, per cui tutte le onde di frequenza sempre più elevata presenti in un generico spettro di moto ondoso in mare, anche vicino a riva, attenuano fortemente, se esiste uno strato superficiale, la loro capacità di trasporto e quindi di allontanamento, dei materiali inquinanti.

Come si è detto poc'anzi, lo strato superficiale, generalmente assai più viscoso dell'acqua, simula la presenza di una tensione τ_2 che considerata staticamente in effetti abbasserebbe quella dell'acqua: ma l'effetto della viscosità e la sua sottigliezza fanno sì che tutto vada come se τ_2 fosse molto grande.

Vediamo come si può spiegare in maniera semplice, se pur approssimata questo fatto: alla superficie del liquido, le componenti della velocità dell'onda lungo l'asse x (orizzontale) e y (verticale), u e v, hanno le espressioni

$$\text{(39)} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{amc}{2} \operatorname{cotgh} mh \, \cos m(x - ct) \\[2ex] v = \dfrac{amc}{2} \sin m\,(x - ct) \end{cases}$$

Poiché lo straterello superficiale, molto esteso, si corruga con l'onda e oscilla restando praticamente sul posto, la componente u tende a 0 sulla superficie, mentre resta pressoché costante v.

Dentro lo straterello di spessore s molto piccolo, è quindi più che ammissibile una distribuzione di velocità data da

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{amc}{2} \operatorname{cotgh} mh \cdot \left(1 - \dfrac{y}{s}\right) \cos m(x - ct) \\[2ex] v = \dfrac{amc}{2} \sin m(x - ct) \end{cases}$$

se vogliamo ora calcolare la dissipazione energetica E per effetto delle tensioni viscose nello strato superficiale ricordiamo che è:

$$\text{(41)} \qquad E = \iint \Phi dx dy$$

dove la funzione di dissipazione Φ, con riferimento alle (40) si scrive nel nostro caso semplicemente:

$$\text{(42)} \qquad \Phi = \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right]$$

Si ottiene immediatamente

$$\text{(43)} \qquad E = \mu \int_0^\lambda \int_0^s \left[\frac{a^2 c^2 m^4}{2} \operatorname{cotgh}^2 mh \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 \sin^2 m(x - ct) + \right.$$

$$+\left(\frac{a^2c^2m^4}{4}+\frac{a^2c^2m^2}{4\,s^2}\,\text{cotgh}^2\,mh-\frac{a^2c^2m^3}{2\,s}\,\text{cotgh}\,mh\right)\cos^2 m(x-ct)\Bigg]dxdy$$

da cui integrando rispetto a y e trascurando i termini aventi a fattore s si ha ancora

$$E\simeq\mu\int_0^\lambda\left(\frac{a^2c^2m^2}{4\,s}\,\text{cotgh}^2\,mh-\frac{a^2c^2m^3}{2}\,\text{cotgh}\,mh\right)\cos^2 m(x-ct)dx \tag{44}$$

da cui con ulteriore integrazione si ottiene

$$E\simeq\frac{\pi}{2}\,\mu a^2mg\left(\frac{\text{cotgh}\,mh}{2\,ms}-1\right) \tag{45}$$

Si vede subito da qui che il secondo termine tra parentesi è irrisorio rispetto al primo data la piccolezza di s in generale, per cui, facendo comparire il coefficiente di viscosità cinematico ν dello strato e il suo peso specifico γ_s la (45) diventa:

$$E\simeq\frac{\pi}{4}\,\frac{\gamma_s a^2\nu}{s\,\text{tgh}\,mh} \tag{46}$$

La (46) esprime l'energia dissipata per unità di tempo vale a dire la potenza dissipata nello straterello superficiale.

Eseguendo quindi un confronto fra le energie possedute mediamente in un periodo (potenze) da un'onda con tensione superficiale τ e fra un'altra che dissipa energia nello straterello superficiale per viscosità, abbiamo

$$\frac{\gamma a^2c}{8}\left(1+\frac{m^2\tau}{\gamma}\right)=\frac{\gamma a^2c}{8}+\frac{\pi}{4}\,\frac{\gamma_s a^2\nu}{s\,\text{tgh}\,mh} \tag{47}$$

Si trova quindi l'espressione della τ equivalente, indicata in precedenza con τ_2 e del parametro ε, dati evidentemente da:

$$\tau=\tau_2=\frac{2\pi\gamma_s\nu}{cm^2s\,\text{tgh}\,mh}\,,\qquad \varepsilon=\frac{2\pi\nu}{cs\,\text{tgh}\,mh}\,\frac{\gamma_s}{\gamma} \tag{48}$$

Dai valori sperimentali di ν, per olii di varia natura dell'ordine di centinaia o migliaia di volte più grandi di quello dell'acqua, e data la piccolezza di s ($10^{-4}\div 10^{-5}$ m), si vede come ε possa giungere a valori anche maggiori di quelli riportati nelle tabelle I e II e quindi consentire fortissime riduzioni nel trasporto di materiale dovuto alle onde, trasporto che invece è sensibile per materiali incoerenti e tale da portarli in breve tempo in tutte le direzioni a grande distanza.

Pertanto si deve concludere che i banchi molto estesi di olii, idrocarburi e prodotti ad alta viscosità galleggianti sull'acqua tendono a essere molto stabili e a contrastare fortemente l'autodepurazione indotta dalle correnti collegate ai moti ondosi.

R. S. RIVLIN (*)

Flow of a Newtonian Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders.

Summary. — *Brief review of the flow of an incompressible Newtonian fluid in the annular region between two circular cylinders with parallel axes, either or both or which are rotating about their respective axes with constant angular velocities.*

1. — Introduction.

The problem of the flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders has attracted a good deal of attention since the pioneering papers of Reynolds [1] and Zhukowski [2]. Many of the papers, like that of Reynolds, are restricted to the case when the ratio between the radii of the inner and outer cylinders is approximately unity (the lubrication approximation), or to some other asymptotic case.

Zhukowski appears to have been the first person to attempt to solve the problem without restriction on the geometry of the system. However, he neglected inertial effects (Stokes solution), as did all subsequent workers who discussed the problem without restriction on the geometry of the system. (An exception is the paper by Kamal [3], which is, however, incorrect.) The first satisfactory solution was that of Jeffrey [4] who reduced the problem to that of solving the biharmonic equation for the stream-function, subject to the no-slip boundary conditions on the containing cylinders, and obtained a solution to this problem in closed form. The work of Jeffrey was repeated by Duffing [5], H. Reissner [6] and Müller [7], [8], [9]. In his papers, Müller developed the implications of the mathematical analysis much more fully than the previous authors.

Recently, in collaboration with B. Y. Ballal, I took up the problem again with the specific object of obtaining some understanding of the effect of inertia on both the stream-line pattern and the forces exerted

(*) Lehigh University. Premio Panetti 1975.

by the fluid on the containing cylinders, without restricting the geometry of the system. Our analysis is based on the linearized inertial approximation, in which the effect of inertia is introduced as a first-order regular perturbation of the Stokes solution. Incidentally to this work, we have also analyzed the implications of the non-inertial, i.e. the Stokes, solution to the problem more completely than had been done hitherto. This work is fully described in a lengthy paper which has been published elsewhere [10]. Our results cover the description of the flow field, the resultant forces exerted by the fluid on the containing cylinders and their distribution over the cylinders. These results are obtained both in the case when inertial effects are neglected and when the linearized inertial approximation is made, and cover the situations when both of the cylinders are rotating, either in the same or opposite senses, and when one of the cylinders is stationary.

The object of the present paper is to present some of our more interesting conclusions without the distraction of the detailed mathematical analysis. However, while we discuss here the character of the flow field and the resultant forces exerted by the fluid on the cylinders, and the effect of the geometry of the system and the angular velocities of the cylinders on both of these, under both the Stokes and linearized inertial approximations, the rather complicated behavior of the detailed force distributions over the cylinders is not discussed here. However, it is fully discussed in [10].

Inevitably, our results for the case when the Stokes approximation is made overlap to a considerable extent with those of the earlier workers, and those obtained by introducing the linearized inertial correction overlap to some extent with the results obtained, with the lubrication approximation, by Yamada and Nakabayashi [11] and by DiPrima and Stuart [12].

2. — The Stokes Approximation.

We assume that the angular velocities of the outer and inner cylinders are Ω_1 and Ω_2 respectively and that their radii are R_1 and R_2 respectively. Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be the traces of the outer and inner cylinders respectively in a plane normal to their axes and let c_1 and c_2 be the centers of the circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$. We denote by L the straight line passing through c_1 and c_2. Let x be a two-dimensional rectangular cartesian coordinate system in the plane of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ with L as its 1-axis. Let v_1, v_2 be the components in the system x of the velocity of a generic fluid particle. Then, if we neglect inertial effects, v_1 and v_2 are given in terms of a stream-function ψ by

$$v_1 = \partial\psi/\partial x_2\,, \quad v_2 = -\,\partial\psi/\partial x_1\,. \tag{2.1}$$

ψ satisfies the biharmonic equation

$$\nabla^4 \psi = 0 . \tag{2.2}$$

The velocity (v_1, v_2) must, of course, satisfy the "no-slip" boundary condition on each of the rotating cylinders. Let ξ, η be a bipolar coordinate system in the plane of the system x, such that $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are the circles $\xi = \xi_1$ and $\xi = \xi_2$ respectively, where ξ_1 and ξ_2 are negative constants. The solution of (2.2) takes the form

$$\psi = \frac{b}{\cosh \xi - \cos \eta} \left\{ F_0(\xi) + F_1(\xi) \cos \eta \right\} , \tag{2.3}$$

where

$$\begin{aligned} F_0(\xi) &= (A_0 + C_0\xi) \cosh \xi + (B_0 + D_0\xi) \sinh \xi , \\ F_1(\xi) &= A_1 \cosh 2\xi + B_1 \sinh 2\xi + C_1\xi + D_1 , \end{aligned} \tag{2.4}$$

and b is defined in terms of the radii R_1 and R_2 of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ and the distance ε between their centers c_1 and c_2 by

$$b = \frac{1}{2\varepsilon} [(R_1^2 + R_2^2 - \varepsilon^2)^2 - 4R_1^2R_2^2]^{\frac{1}{2}} . \tag{2.5}$$

In (2.4), A_0, B_0, ..., D_1 are constants which are determined from the no-slip boundary conditions. Each of them has the form

$$f(\xi_1, \xi_2)\Omega_1R_1 + f(\xi_2, \xi_1)\Omega_2R_2 , \tag{2.6}$$

where the coefficients of Ω_1R_1 and Ω_2R_2 are functions of ξ_1, ξ_2 only and hence are non-dimensional and depend only on the geometry of the system. It would be tedious to write the expressions for these functions here. Explicit expressions are given in [10], §4 and in the earlier papers [4]-[9]. For a specified geometry of the system, the values of ξ_1 and ξ_2 are given by

$$R_1 = - b/\sinh \xi_1 , \qquad R_2 = - b/\sinh \xi_2 . \tag{2.7}$$

By using (2.3) and the appropriate expressions for $F_0(\xi)$ and $F_1(\xi)$, we can plot the stream-lines $\psi =$ constant for any geometry of the system and any angular velocities of the outer and inner cylinders. The stream-line pattern is determined by the three parameters $\bar{R}$, $\bar{\varepsilon}$ and $\bar{\Omega}$ defined by

$$\bar{R} = R_2/R_1 , \qquad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/(R_1 - R_2), \qquad \bar{\Omega} = \Omega_2/\Omega_1 . \tag{2.8}$$

The types of stream-line pattern which are found in the cases when the inner cylinder is stationary ($\Omega_2 = 0$), when the outer cylinder is stationary ($\Omega_1 = 0$), when both cylinders are rotating in the same direction ($\bar{\Omega} > 0$)

and when the cylinders are rotating in opposite directions ($\bar{\Omega} < 0$) will be described in the next section.

3. — Stream-lines in the Stokes Approximation.

a) *Outer cylinder stationary.*

In this case, the stream-line pattern in the cross-sectional plane considered depends only on $\bar{R}$ and $\bar{\varepsilon}$. For any value of $\bar{R}$, when $\bar{\varepsilon} = 0$, i.e. the cylinders are coaxial, the stream-lines are circles centered on the common center of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$. As $\bar{\varepsilon}$ increases, with $\bar{R}$ fixed, the stream-lines remain closed curves encircling $\mathcal{C}_2$ (fig. 1*a*) until some critical value of $\bar{\varepsilon}$ is reached. However, above this critical value, the situation changes and separation of the flow occurs on $\mathcal{C}_1$ at points symmetrically disposed with respect to L (figs. 1*b*-*d*). At the critical value of $\bar{\varepsilon}$ these two separation

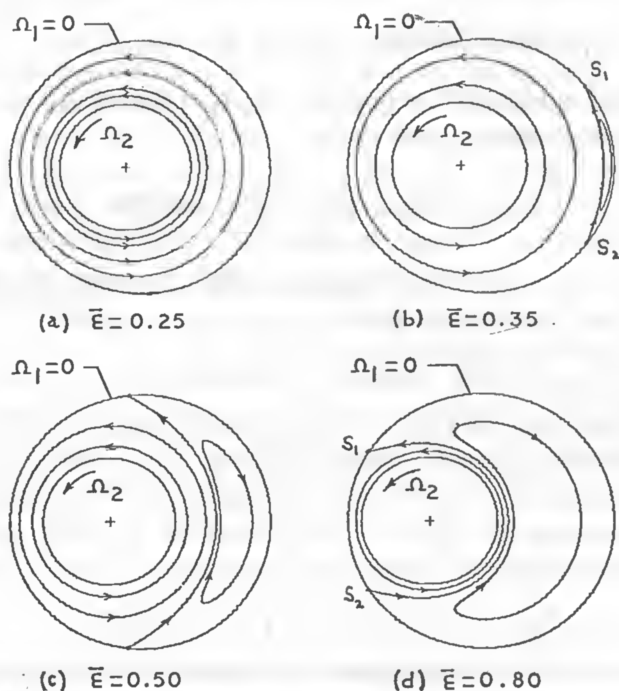


Fig. 1 - Stream-lines for Stokes approximation for various values of $\bar{\varepsilon}$, when the outer cylinder is stationary ($\bar{R} = 0.5$).

points S_1, S_2 (say) coincide on L and as $\bar{\varepsilon}$ increases the arc of $\mathcal{C}_1$ connecting them increases until, when $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are touching, they again coincide at the point of contact. Concomitantly with the existence of separation points S_1 and S_2, an eddy is formed in the region bounded by the stream-line in the fluid joining them and the arc S_1S_2 of $\mathcal{C}_1$. The stream-lines in the fluid lying outside this region encircle $\mathcal{C}_2$.

The critical value of $\bar{\varepsilon}$ at which separation first occurs decreases monotonically as $\bar{R}$ increases. This dependence has been plotted in [10].

b) *Inner cylinder stationary.*

When the inner cylinder is stationary ($\Omega_2 = 0$), analogous results are obtained. We find again (fig. 2) that, for sufficiently small eccentricies,

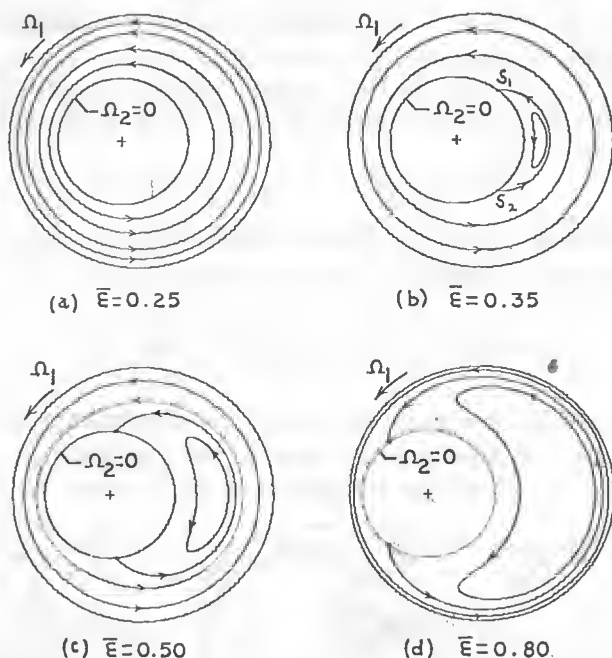


Fig. 2 - Stream-lines for Stokes approximation for various values of $\bar{\varepsilon}$, when the inner cylinder is stationary ($\bar{R} = 0.5$).

all of the stream-lines encircle $\mathcal{C}_2$. As $\bar{\varepsilon}$ is increased separation points S_1, S_2 occur on $\mathcal{C}_2$ and an eddy is formed in the region between the arc S_1S_2 of $\mathcal{C}_2$ and the stream-line in the fluid joining S_1 and S_2. The length of the arc S_1S_2 of $\mathcal{C}_2$ and the domain occupied by the eddy increase as $\bar{\varepsilon}$ increases until finally, when $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ touch (i.e. $\bar{\varepsilon} = 1$), the separation points coalesce at the point of contact and the eddy occupies the whole of the domain between $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$. For each value of $\bar{\varepsilon}$, the stream-lines in the region outside that occupied by the eddy encircle $\mathcal{C}_2$.

In this case, the critical value of $\bar{\varepsilon}$ at which separation first occurs increases monotonically as $\bar{R}$ increases. The dependence has been plotted in [10].

c) *Cylinders rotating in the same direction.*

In order to determine the conditions under which stagnation points or eddies can exist in the fluid, when both cylinders are rotating in the

same direction, we prove in [10] a theorem that any eddy center in the plane of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ must lie on the major segment in the fluid of the straight line L. We prove also that there exists in the fluid one and only one circular stream-line which is a coordinate line of the bipolar system. Further, if there exist any stagnation points which are not eddy centers, i.e. separation points, there must be a single pair of them symmetrically disposed about L and they must lie in this circular stream-line. As a special case, these separation points may coalesce on L.

Now, let $\xi = \bar{\xi}$, say, be the unique circular stream-line which is a coordinate line. It has been shown in [10] that $\bar{\xi}$ is the unique solution of the equation

$$\bar{F}(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi) \sinh \xi = 0 , \tag{3.1}$$

which lies between ξ_1 and ξ_2. The necessary and sufficient condition for separation points to exist on this stream-line is

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \bar{\xi} \leq \frac{1}{2} \frac{\bar{F}'(\bar{\xi})}{F_1'(\bar{\xi})} \leq \cosh^2 \frac{1}{2} \bar{\xi} . \tag{3.2}$$

If this condition is not satisfied, all of the stream-lines encircle $\mathcal{C}_2$ (see, for example, fig. 3*a*). On the other hand, if the condition (3.2) is satisfied (as occurs, for the geometry considered in fig. 3, when $\Omega_2/\Omega_1 > 1.2214$),

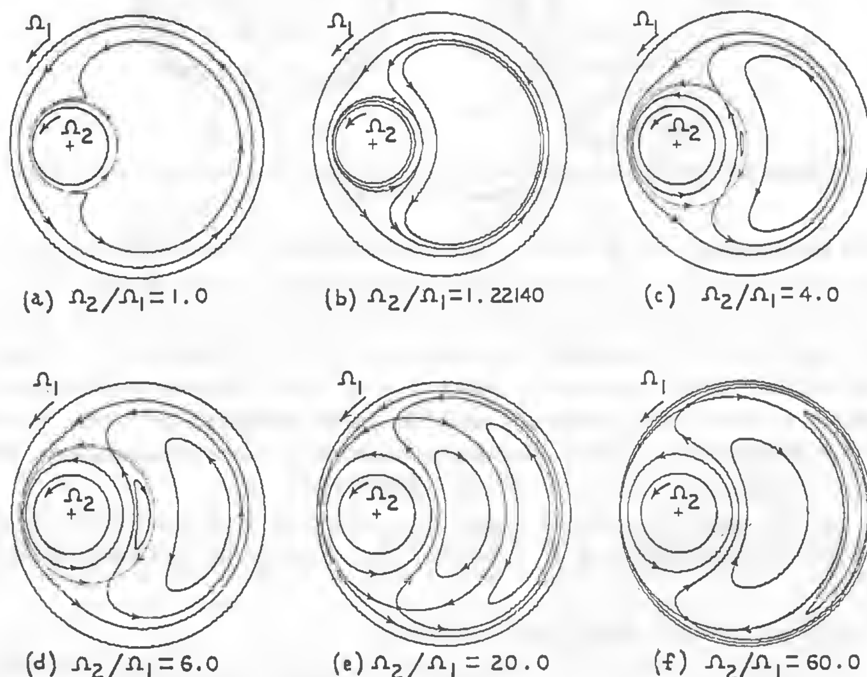


Fig. 3 - Stream-lines for Stokes approximation for various values of $\Omega_2/\Omega_1 > 0$ ($\bar{R} = 0.3$, $\bar{\varepsilon} = 0.75$).

there exist regions near $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ in which the stream-lines encircle $\mathcal{C}_2$ and between these regions we find two eddies with vorticities of opposite signs (see, for example, figs. 3*c-f*). At the critical value of Ω_2/Ω_1, the inner eddy degenerates into a single point (fig. 3*b*) and as Ω_2/Ω_1 increases beyond this value, the region occupied by the inner eddy grows at the expense of that occupied by the outer eddy.

d) *Cylinders rotating in opposite directions.*

When the two cylinders rotate in opposite directions, there is a single separation point on the shorter segment in the fluid of the straight line L (fig. 4). This arises as the intersection of two stream-lines which encircle

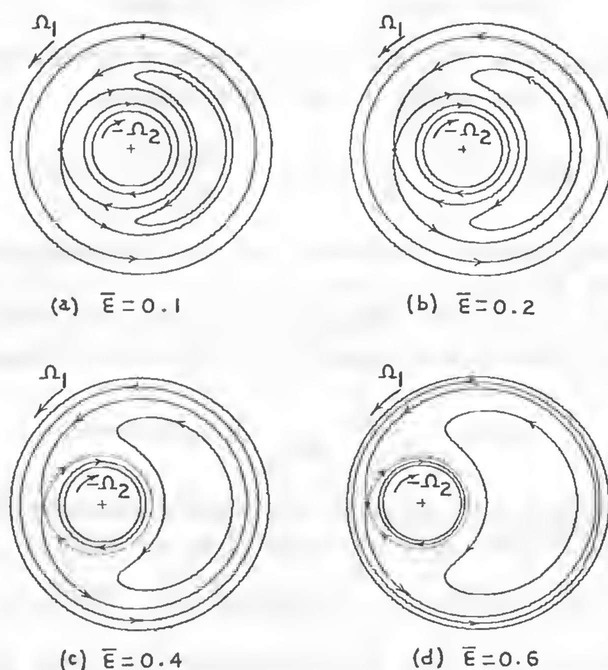


Fig. 4 - Stream-lines for Stokes approximation for various values of $\bar{\varepsilon}$ ($R = 0.3$, $\Omega_2/\Omega_1 = -4.0$).

$\mathcal{C}_2$. Within the region bounded by these two stream-lines, we have a single eddy. The stream-lines in the regions outside and inside that occupied by the eddy encircle $\mathcal{C}_2$. We note that as the eccentricity decreases, the region occupied by the eddy decreases until, in the limiting case when $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are concentric, the region degenerates into a circle concentric with $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ on which the velocity of the fluid is zero.

4. — The Linearized Inertial Approximation.

In this section it will be shown how a correction to the stream-function can be determined which takes into account the effect of inertia. We assume

that the inertial effects are sufficiently small so that we may write the stream-function in the form

$$\psi = \psi_0 + \frac{\varrho}{\mu}\psi_1 , \tag{4.1}$$

where ψ_0 is the stream-function (2.3) given by the Stokes approximation, ϱ is the density of the fluid, μ is its viscosity, and $\psi^{(1)}$ is independent of ϱ and μ. If $\varrho v_1^{(1)}/\mu$ and $\varrho v_2^{(1)}/\mu$ are the changes in v_1 and v_2 which result from replacing the Stokes approximation by the linearized inertial approximation, then

$$v_1^{(1)} = \partial\psi_1/\partial x_2 , \qquad v_2^{(1)} = -\partial\psi_1/\partial x_1 . \tag{4.2}$$

It is easy to show that, if we neglect terms of higher degree than the second in ϱ/μ, ψ_1 must satisfy the governing equation

$$\nabla^4\psi_1 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\psi_0) - \frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2\psi_0), \tag{4.3}$$

while the no-slip boundary conditions imply that on each cylinder ψ_1 and its first spatial derivatives are zero.

In order to solve (4.3), subject to the no-slip boundary conditions, we transform it to the bipolar system ξ, η and obtain a solution in the form

$$\psi_1 = \frac{2b}{\cosh\xi - \cos\eta}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi)\sin n\eta, \tag{4.4}$$

where the functions $G_n(\xi)$ are rather complicated functions of ξ which are given in [10, § 5]. They may be expressed in the form

$$G_n(\xi) = \Omega_1^2 R_1^2 \bar{G}_n(\xi) + \Omega_1\Omega_2 R_1 R_2 \tilde{G}_n(\xi) + \Omega_2^2 R_2^2 \hat{G}_n(\xi), \tag{4.5}$$

where $\bar{G}_n(\xi)$, $\tilde{G}_n(\xi)$ and $\hat{G}_n(\xi)$ are dimensionless functions which depend only on the geometry of the system.

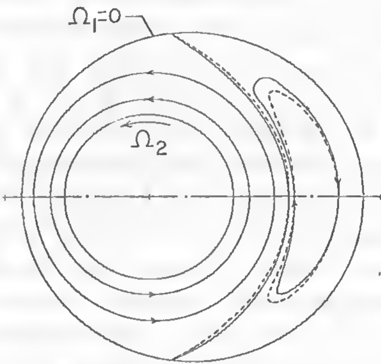
5. — The Effect of Inertia on the Stream-lines.

The stream-lines which result from the non-linear inertial correction are, of course, given by

$$\psi + \frac{\varrho}{\mu}\psi_1 = \text{constant}. \tag{5.1}$$

For a given geometry and angular velocities of the cylinders, the change in the stream-line pattern from that given by the Stokes approximation is, loosely speaking, proportional to ϱ/μ, for sufficiently small values of ϱ/μ.

The qualitative effects in the cases when one or other of the cylinders is stationary and the eccentricity is sufficiently large so that separation takes place on the stationary cylinder are shown schematically in figs. 5 and 6. Similarly, in fig. 7, the effect of the linearized inertial correction on the stream-line pattern is shown for the case when both cylinders are rotating in the same direction with Ω_2/Ω_1 sufficiently large so that two



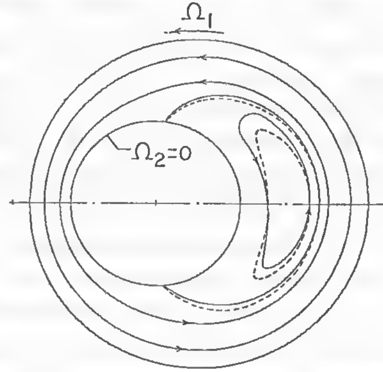


Fig. 5. Fig. 6.

Fig. 5 - Stream-lines for the first-order inertial approximation when $\overline{R} = 0.5$, $\bar{\varepsilon} = 0.5$, $\Omega_2 R_1^2 \varrho/\mu = 148.8$ and the outer cylinder is stationary. (The broken lines are stream-lines for the Stokes approximation.)

Fig. 6 - Stream-lines for the first-order inertial approximation when $\overline{R} = 0.5$, $\bar{\varepsilon} = 0.5$, $\Omega_1 R_1^2 \varrho/\mu = 50$ and the inner cylinder is stationary. (The broken lines are stream-lines for the Stokes approximation.)

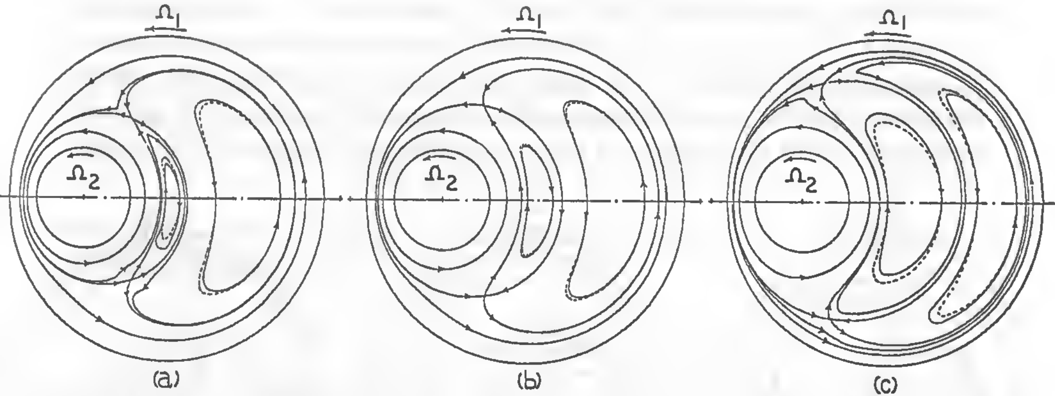


Fig. 7 - Stream-lines for the first-order inertial approximation when $\overline{R} = 0.3$, $\bar{\varepsilon} = 0.75$, $\Omega_1 R_1^2 \varrho/\mu = 4.0$ and $\Omega_2/\Omega_1 > 0$. (*a*) $\Omega_2/\Omega_1 = 6.0$, (*b*) $\Omega_2/\Omega_1 = 8.78$, (*c*) $\Omega_2/\Omega_1 = 20.0$. (The broken lines are stream-lines for the Stokes approximation.)

eddies are formed in the fluid. Again, in fig. 8 we show the effect in the case when the two cylinders rotate in opposite directions. In each of figs. 5-8 the broken line represents a stream-line which is given by the Stokes approximation.

From figs. 5 and 6, we see that when one of the cylinders is stationary the linearized inertial correction has only a very small effect on the position of the separation points on the stationary cylinder. However, the effect on the position of the eddies is much greater, the eddy being displaced in the direction of rotation of the rotating cylinder.

From fig. 7 it is seen that, when both cylinders are rotating in the same direction, the geometry and ratio Ω_2/Ω_1 being such that a pair of eddies is predicted by the Stokes approximation, the effect of the linearized inertial correction is to shift the eddies in opposite directions. For the particular geometry of fig. 7 and the ratio Ω_2/Ω_1 used in fig. 7*a*, it is seen that the inner eddy is shifted in the direction of rotation of the cylinders and the outer eddy is shifted in the opposite direction. However, this is not always the case. For example, with the ratio of Ω_2/Ω_1 used in fig. 7b, the streamline pattern is virtually unchanged from that given by the Stokes approximation and for lower values of Ω_2/Ω_1 (fig. 7*a*) the outer eddy shifts in the direction of rotation of the cylinders while the inner eddy shifts in the opposite direction. In the case of the Stokes approximation, the pair of stagnation points are symmetrically disposed with respect to L and are the intersections of a single pair of streamlines. This is not the case for the linearized inertial approximation; the two stagnation points are not, in general, symmetrically disposed with respect to L and they lie on different pairs of streamlines.

It has been seen that when the cylinders rotate in opposite directions, the Stokes approximation predicts the existence of a single stagnation point on L. This arises as the intersection of two stream-lines which encircle C_2 and an eddy exists in the region between these stream-lines. In the linearized inertial approximation, the stagnation point is, in general, shifted off L and the eddy is no longer symmetrically disposed with respect

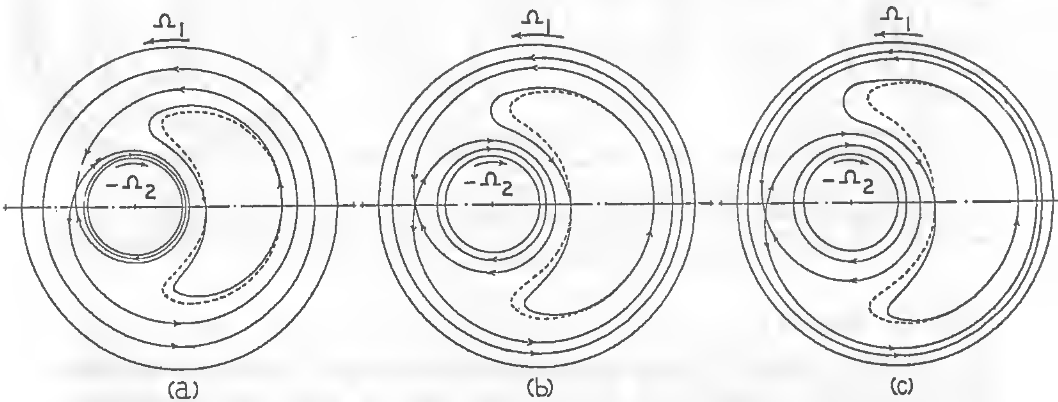


Fig. 8 - Stream-lines for the first-order inertial approximation when $\overline{R} = 0.3$, $\bar{\varepsilon} = 0.4$, $\Omega_1 R_1^2 \varrho/\mu = 100$ and $\Omega_2/\Omega_1 > 0$. (*a*) $\Omega_2/\Omega_1 = -2.0$, (*b*) $\Omega_2/\Omega_1 = -4.718$, (*c*) $\Omega_2/\Omega_1 = -7.0$. (The broken lines are stream-lines for the Stokes approximation.)

to L (fig. 8). It is seen in fig. 8 that while the eddy is displaced in the direction of rotation of the outer cylinder for all three values of Ω_2/Ω_1, the stagnation point moves in the direction of rotation of the outer cylinder for large values of Ω_2/Ω_1 and in the opposite direction for small values of Ω_2/Ω_1. For some intermediate value of Ω_2/Ω_1 (fig. 8*b*) the stagnation point is not displaced.

6. — Forces Acting on the Cylinder.

It is well-known that if the Stokes approximation is made, the resultant force per unit length exerted by the fluid on the inner cylinder is in a direction perpendicular to L, i.e. in the direction of the x_2-axis. Let us denote it by $T_2^{(0)}$. It is given in terms of the two-dimensional stress $\sigma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ in the system x by

$$T_2^{(0)} = R_2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{21} \cos \chi + \sigma_{22} \sin \chi) d\chi \,, \tag{6.1}$$

where χ is the angle between the radius of $\mathfrak{C}_2$ to the point on $\mathfrak{C}_2$ considered and L. An expression for the force $T_2^{(0)}$ can be obtained from (6.1) by using the expression (2.3) for ψ, together with (2.1) and the constitutive equation for the two-dimensional stress $\sigma_{\alpha\beta}$, referred to the system x, in a Newtonian fluid

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - p \delta_{\alpha\beta} \,, \tag{6.2}$$

where p is an arbitrary hydrostatic pressure and $\delta_{\alpha\beta}$ is the two-dimensional Kronecker delta. In this manner we obtain

$$T_2^{(0)} = 2\mu R_1 \bar{T}_2^{(0)} (\Omega_1 + \Omega_2 \bar{R}^2) \,, \tag{6.3}$$

where $\bar{T}_2^{(0)}$ is a dimensionless quantity which depends only on the geometry of the system and is given by

$$\bar{T}_2^{(0)} = - \frac{2\pi}{\Delta^*} \sinh \xi_2 \sinh^2 (\xi_1 - \xi_2) \,, \tag{6.4}$$

with

$$\Delta^* = \sinh (\xi_1 - \xi_2)[2 \sinh \xi_1 \sinh \xi_2 \sinh (\xi_1 - \xi_2) - \\ - (\xi_1 - \xi_2)(\sinh^2 \xi_1 + \sinh^2 \xi_2)]. \tag{6.5}$$

It can be easily shown that $\bar{T}_2^{(0)}$ is necessarily negative. The force per unit length exerted by the fluid on the outer cylinder is, of course, equal and opposite to $\bar{T}_2^{(0)}$. The dependence of $\bar{T}_2^{(0)}$ on $\bar{R}$ and $\bar{\varepsilon}$ is shown in fig. 9.

If the linearized inertial approximation is made rather than the Stokes approximation, the components perpendicular to L of the resultant forces per unit length exerted by the fluid on the inner and outer cylinders are unchanged. However, the forces now have equal and opposite components parallel to L. We denote by $\varrho T_2^{(1)}$ the component in the direction of the x_1 - axis of the force per unit length exerted by the fluid on the inner cylinder and by $\varrho\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ the change in the two-dimensional stress, referred to the coordinate system x, which results from replacing the Stokes approximation by the linearized inertial approximation. Then $T_1^{(1)}$ is given by

$$\bar{T}_1^{(1)} = R_2 \int_0^{2\pi} (\sigma_{11}^{(1)} \cos \chi + \sigma_{12}^{(1)} \sin \chi) d\chi \,, \tag{6.6}$$

while $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ is given by

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{\partial v_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta^{(1)}}{\partial x_\alpha} - p^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \,, \tag{6.7}$$

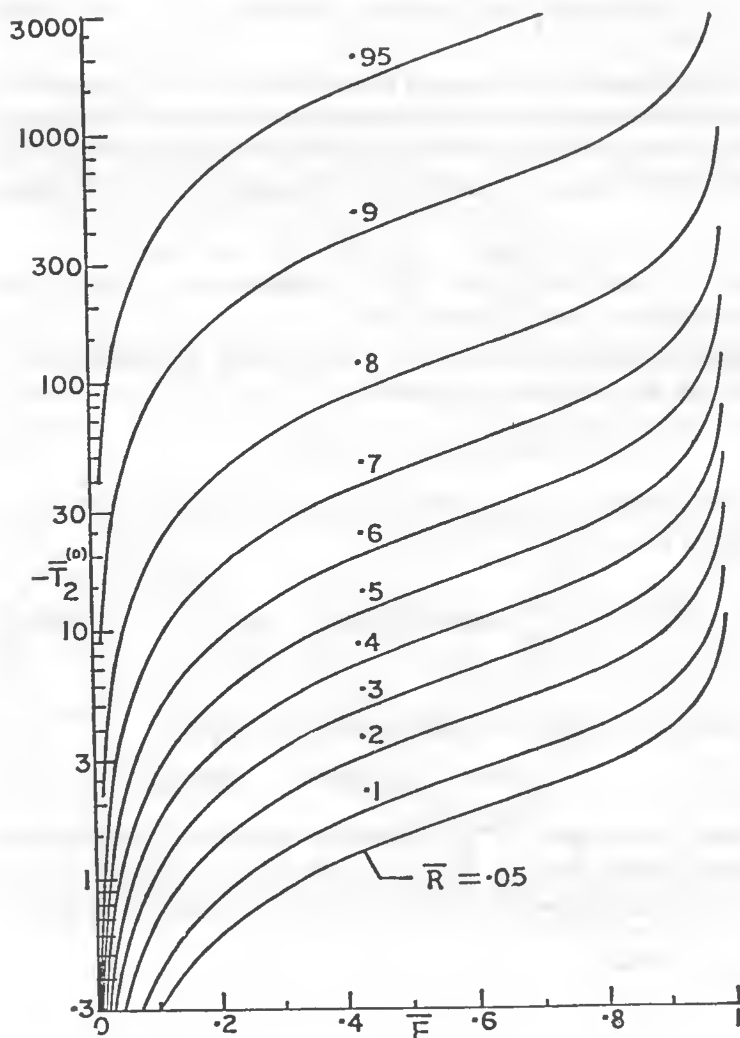


Fig. 9. $-\bar{T}_2^{(0)}$ vs. $\bar{\varepsilon}$ for various values of $\bar{R}$.

where $p^{(1)}$ is arbitrary. By using (4.4), (4.5), (4.2) and (6.7) in (6.6), we can obtain an expression for $T_1^{(1)}$ in the form

$$T_1^{(1)} = -2\pi b G_1'''(\xi_2), \tag{6.8}$$

where the prime denotes differentiation with respect to ξ. With (4.5) we can write

$$T_1^{(1)} = R_1^3 \left(\overline{T}_1^{(1)}\Omega_1^2 + \widetilde{T}_1^{(1)}\Omega_1\Omega_2 + \widehat{T}_1^{(1)}\Omega_2^2\right), \tag{6.9}$$

where $\overline{T}_1^{(1)}$, $\widetilde{T}_1^{(1)}$ and $\widehat{T}_1^{(1)}$ are dimensionless quantities which depend only on the geometry of the system and are given by

$$R_1^3\overline{T}_1^{(1)} = -2\pi b R_1^2 \overline{G}_1'''(\xi_2), \qquad R_1^3\widetilde{T}_1^{(1)} = -2\pi b R_1 R_2 \widetilde{G}_1'''(\xi_2),$$
$$R_1^3\widehat{T}_1^{(1)} = -2\pi b R_2^2 \widehat{G}_1'''(\xi_2). \tag{6.10}$$

The dependence of $\overline{T}_1^{(1)}$, $\widetilde{T}_1^{(1)}$ and $\widehat{T}_1^{(1)}$ on $\overline{R}$ and $\bar{\varepsilon}$ is shown in figs. 10, 11 and 12 respectively. We see that for each value of $\overline{R}$, $\overline{T}_1^{(1)}$ is

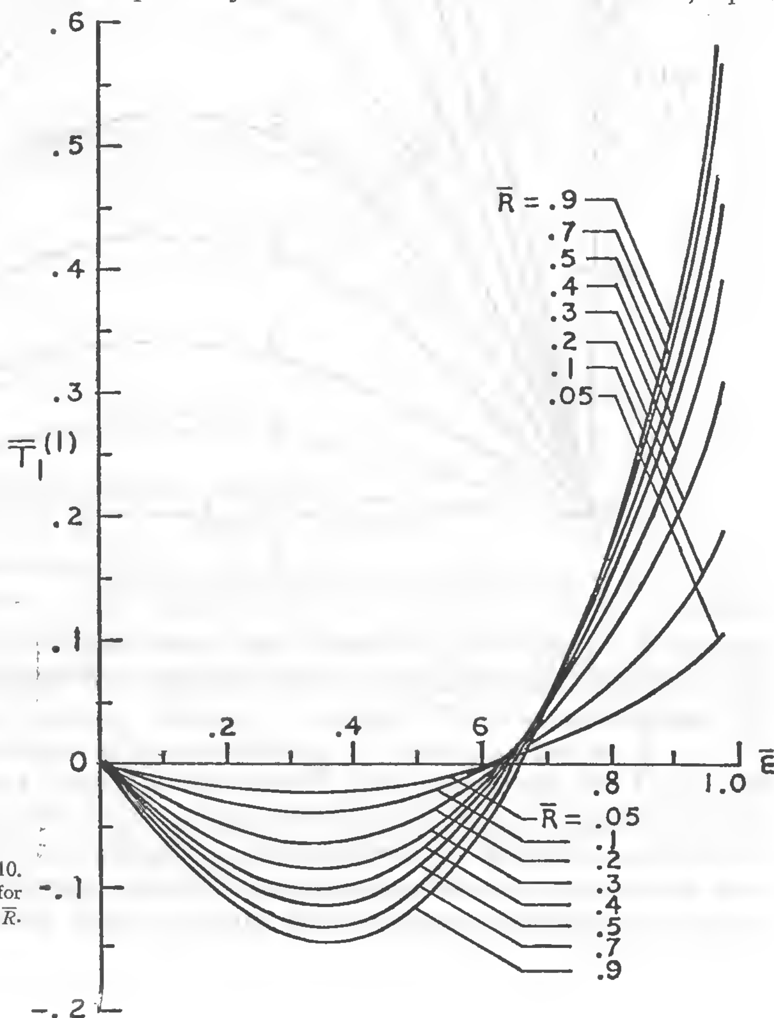


Fig. 10. $\overline{T}_1^{(1)}$ vs. $\bar{\varepsilon}$ for various values of $\overline{R}$.

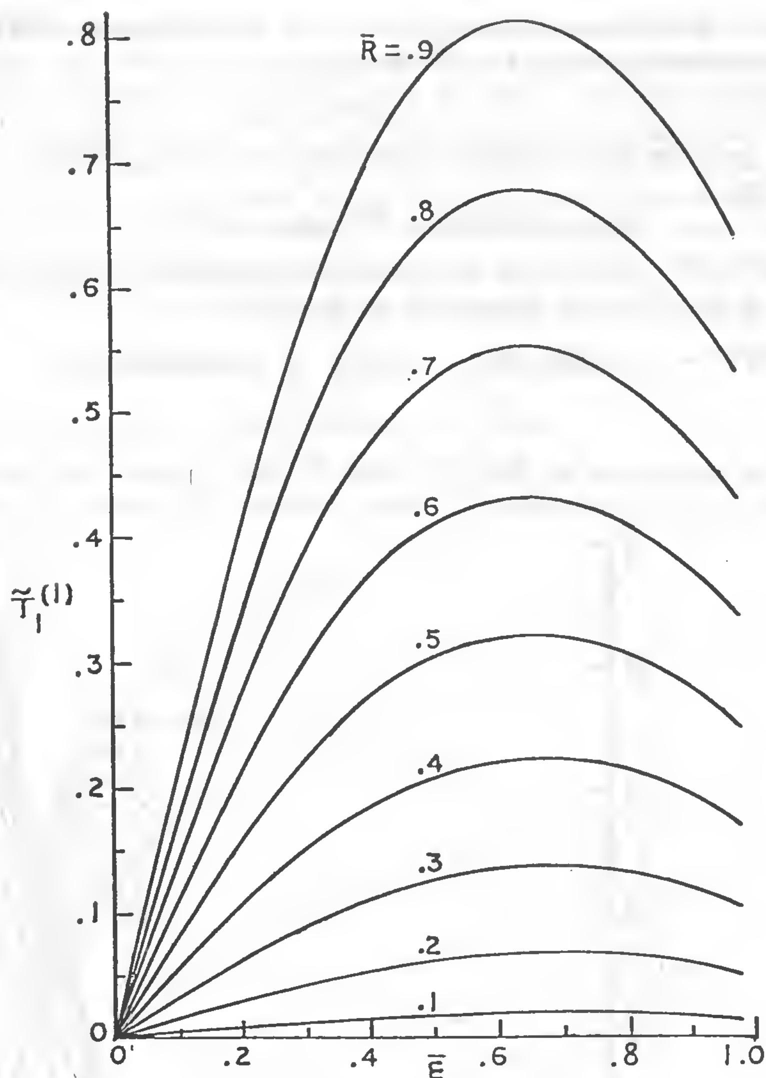


Fig. 11 - $-\tilde{T}_1^{(1)}$ vs. $\bar{\varepsilon}$ for various values of $\bar{R}$.

negative for values of the eccentricity below some critical value. However, when $\bar{\varepsilon}$ exceeds this critical value, which depends on $\bar{R}$ but is about 0.63, $\bar{T}_1^{(1)}$ becomes positive. $\hat{T}_1^{(1)}$ behaves in a similar manner, but for each value of $\bar{R}$ the critical value of $\bar{\varepsilon}$ is slightly above that which obtains in the case of $\bar{T}_1^{(1)}$. We see also that $\tilde{T}_1^{(1)}$ is always negative. It follows that if both cylinders are rotating in the same sense or one of them is stationary, for the lower values of the eccentricity the additional force which results from the linearized inertial correction to the Stokes approximation tends to drive the cylinders towards contact with each other. However, at the

larger values of the eccentricity this force tends to drive the cylinders towards coaxiality.

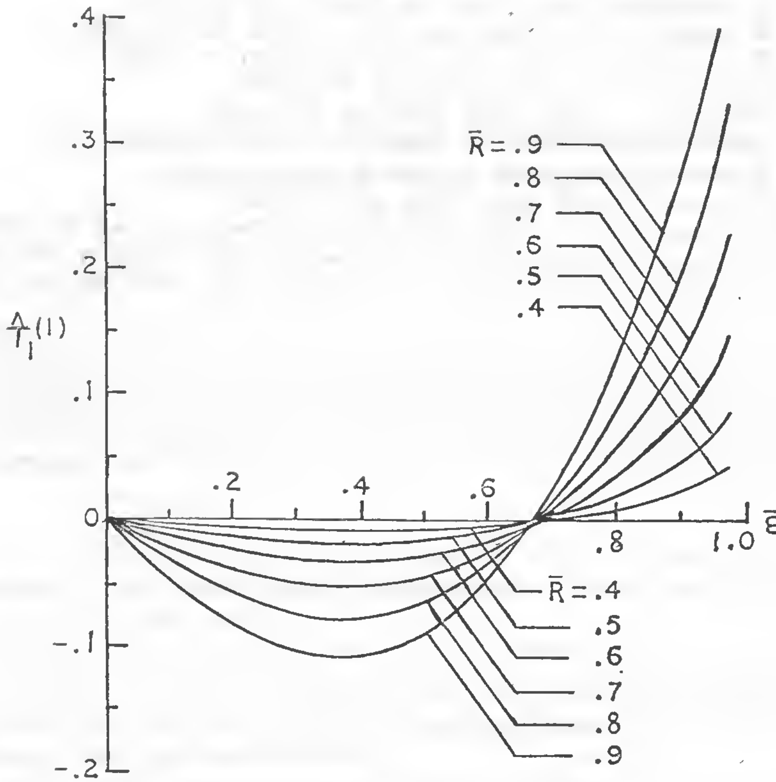


Fig. 12 - $\hat{T}_1^{(1)}$ vs. $\bar{\varepsilon}$ for various values of $\bar{R}$.

ACKNOWLEDGEMENT.

The work described in this paper was supported in part by Army Research Office, Durham under Grant No. DAHCO 4-74-G-0176 to Lehigh University. I am grateful to the editors and publishers of the Archive for Rational Mechanics and Analysis for permission to publish figs. 1 - 12.

REFERENCES

[1] O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **177** (**I**), 157 (1886).
[2] N. E. ZHUKOWSKI, Comm. Math. Soc. Kharkov **17**, 31 (1887).
[3] M. M. KAMAL, J. Basic Engineering, Trans. ASME, **88**, 717 (1966).
[4] G. B. JEFFREY, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **A101**, 169 (1922).
[5] G. DUFFING, Z. Angew. Math. Mech. **4**, 297 (1924).
[6] H. REISSNER, Z. Angew. Math. Mech. **15**, 81 (1935).
[7] W. MÜLLER, Ing.-Arch. **13**, 37 (1942).
[8] W. MÜLLER, Ann. Physik **41**, 335 (1942).
[9] W. MÜLLER, Z. Angew. Math. Mech. **22**, 177 (1942).
[10] B. Y. BALLAL and R. S. RIVLIN, Arch. Rational Mech. Anal. **62**, 237 (1976).
[11] Y. YAMADA and K. NAKABAYASHI, Bull. Japan Soc. Mech. Engrs. **11**, 455 (1968).
[12] R. C. DIPRIMA and J. T. STUART, J. Lubr. Tech., Trans. ASME, **94**, 266 (1972).

G. SUPINO (*)

La propagazione ondosa e il proporzionamento delle opere di difesa dei porti.

Riassunto. — *Si riportano i criteri più moderni per tener conto delle azioni delle onde contro le opere di difesa dei porti. Quando la diga non sia costruita in profondità notevole (superiore a due volte l'ampiezza dell'onda) occorre tener conto, oltre che delle pressioni che si calcolano con le regole del « clapotis » (pressioni secondarie) anche delle pressioni di shock (dedotte con criterio probabilistico).*

1. — I disastri che talvolta colpiscono le opere più impegnative dell'ingegneria, danno spesso origine a progressi sia nel campo tecnico costruttivo che nel campo teorico.

È così notissimo come la rottura della diga di Bouzey in Francia (1894) abbia suggerito modifiche costruttive oltre che una diversa impostazione del calcolo delle dighe a gravità in muratura massiccia che da allora è eseguito in base alla regola del Lévy.

Ma nel campo delle opere esterne dei porti marittimi si possono annoverare — purtroppo — numerosi disastri, senza che si sia giunti a stabilire una causa unica per il disastro e quindi senza aver potuto migliorare in modo definitivo il proporzionamento delle opere stesse. La presente relazione vuole portare un contributo in questo campo e se la presento a questo Convegno che si svolge nel centenario della nascita di Modesto Panetti e in onore di Lui è perché Egli ha svolto ricerche anche nel campo idraulico costruttivo (e in particolare sui serbatoi pensili).

2. — Entro subito in argomento. Come è ben noto le opere di difesa esterna dei porti possono essere di due tipi: il tipo a gettata che riproduce in sostanza una spiaggia più o meno acclive e che rappresenta il tipo classico usato fin dall'antichità romana, ed il tipo a parete verticale che è più moderno, ma anche quello che suscita maggiori perplessità costruttive.

(*) Università di Bologna.

Vi è anche un tipo, detto *misto*, del quale tratteremo più avanti.

Il tipo a gettata riproduce, si è detto, le spiagge; queste sono costituite da materiale minuto che tuttavia non è spostato da una mareggiata; però la pendenza presso le rive è molto piccola (1 di altezza su 10÷12 di base e anche più). Una gettata deve dunque avere in corrispondenza della superficie del mare una pendenza di questo ordine di grandezza. Dato che l'azione delle onde diminuisce con l'aumentare della profondità la pendenza può crescere allontanandosi dalla superficie; pertanto lo schema di un molo a gettata è quello della fig. 1 (che mostra anche come le dimensioni dei vari materiali decrescano all'interno della diga).

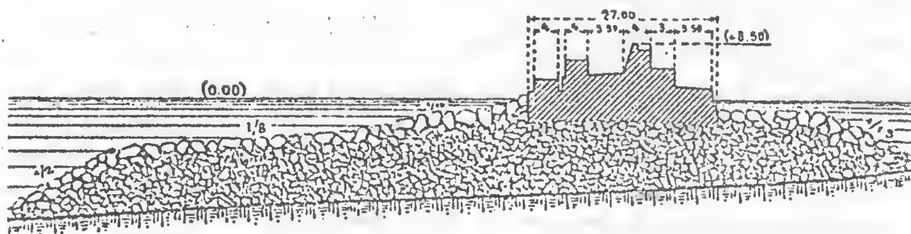


Fig. 1 - Antemurale Trajano di Civitavecchia (1 : 1000), (da Coen-Cagli).

Questo tipo di molo richiede una continua manutenzione perché l'acqua, infiltrandosi tra le pietre, durante il moto ondoso, le consuma e le smuove: e questa azione è così importante che la gettata con massi artificiali posti in filari regolari è più debole della gettata costituita da massi alla rinfusa: con questi ultimi si può far « rifiorire » la gettata aggiungendovi nuovi massi mentre nella gettata a filari regolari lo spostamento dei massi richiede la ricostruzione della scogliera (v. figg. 2*a* e 2*b*).

In conclusione i moli a gettata sono adatti a paraggi con profondità limitata e non molto esposti essendo evidente che al crescere della profondità deve diminuire la esposizione. Nei grandi porti destinati a ricevere le navi

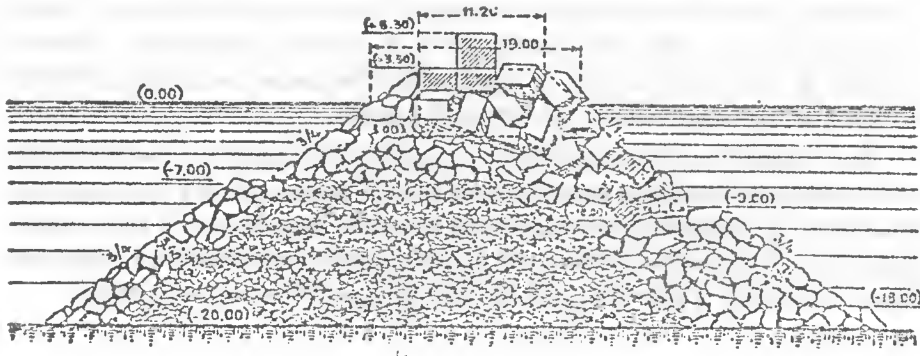


Fig. 2 - Diga di Orano: tipo primitivo (1 : 700).

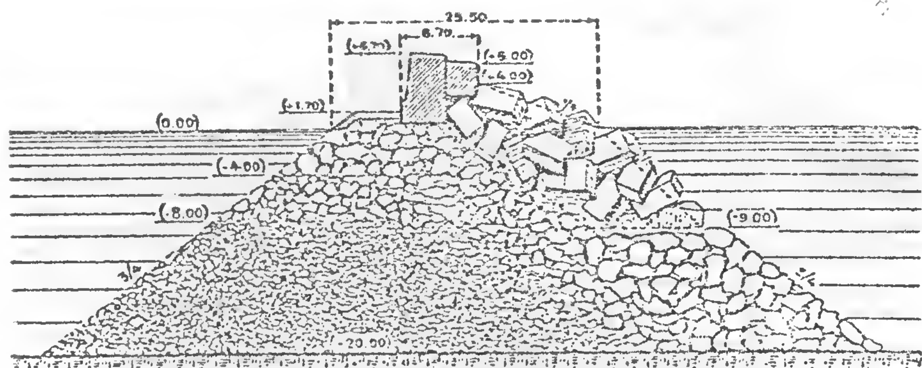


Fig. 2*a* - Diga di Orano: prolungamento (1 : 700).

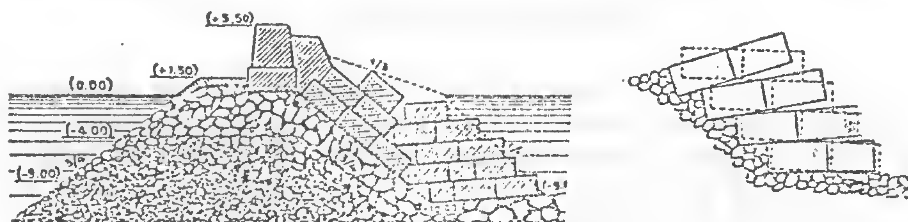


Fig. 2*b* - Diga di Orano: ultimo tratto (1 : 700).

più grandi (navi con 500.000 tonn. di stazza pescano 31 m circa) e nei paraggi molto esposti la costruzione di un molo a gettata richiederebbe un volume di materiale proibitivo.

3. — I moli a parete verticale hanno avuto origine in Gran Bretagna dove sono stati costruiti in paraggi non molto esposti ed in mari a grande sviluppo di marea, quando, durante le basse maree era possibile sistemare i massi della muraglia all'asciutto o in piccola profondità. Il tipo è stato trasferito agli inizi di questo secolo nel Mediterraneo, ma ha dato luogo a vari disastri ai quali accenneremo al numero 5. Qui osserviamo subito che le dighe costruite nel Mediterraneo appartengono tutte al tipo *misto*. In esso (v. fig. 3) tra il fondo del mare (in generale scavato di qualche metro per migliorare la resistenza della fondazione) e l'inizio della parete verticale si ha uno scanno di materiale lapideo (non molto grossolano) gettato alla rinfusa. L'inizio della parete verticale è a seconda dei caratteri del moto ondoso, a *—10,50*, *—12* e anche *—16*, in quanto si ritiene che soltanto a profondità doppia dell'altezza dell'onda l'azione di questa perda di violenza.

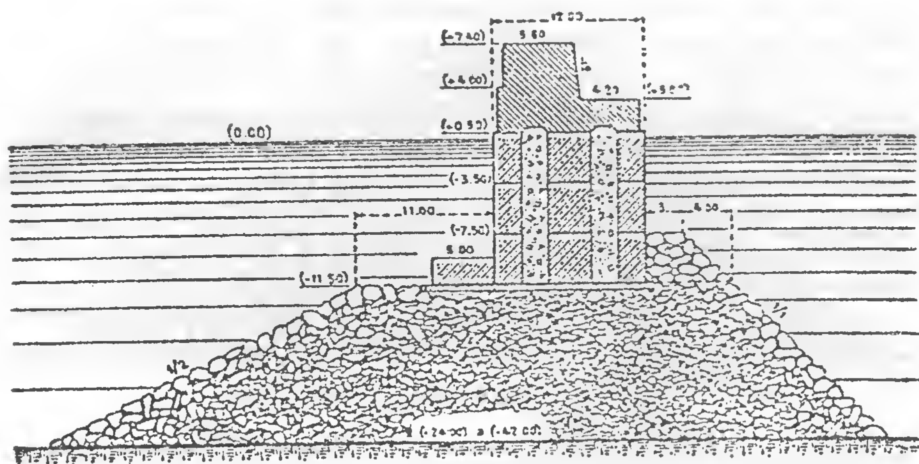


Fig. 3 - Nuova diga sulla bocca del porto di Napoli (1 : 600).

La larghezza della parete verticale è calcolata sulla base della regola del Saintflou (dedotta determinando il « clapotis » per le onde irrotazionali di Stokes di prima approssimazione) integrata da ricerche su modello, relative sempre alla parete verticale, e da osservazioni sperimentali utilizzate con criterio probabilistico. In generale se si indica con A l'altezza dell'onda (cioè la sua ampiezza) l'azione di essa in mare profondo è rappresentata dal diagramma della fig. 4 che tiene conto anche delle discussioni e conclusioni del Congresso internazionale di Navigazione di Bruxelles (1935) e di numerose esperienze su modello. In mare poco profondo il moto ondoso può però manifestarsi con caratteri assai differenti (v. nº 10).

4. — Numerosi sono i disastri provocati dal moto ondoso sui moli a gettata. Ma più numerosi sono stati quelli provocati nei moli a parete verticale.

Di più mentre sui moli a gettata (che non si calcolano ma per i quali si determinano le pendenze e le dimensioni dei materiali in base a valutazioni e confronti con porti già esistenti) i danneggiamenti dipendono esclusivamente da difetti costruttivi (o di manutenzione), invece nei moli a parete verticale si può sospettare anche qualche deficienza di calcolo.

Vediamo dunque di approfondire le cause dei disastri più noti cominciando col considerare le dighe a gettata. Per lo studio del comportamento di queste hanno interesse anche alcuni dati relativi a blocchi isolati spostati dalla tempesta. A Genova, nel 1898, blocchi di calcestruzzo di cemento del peso di 40 tonn. posti nel molo Galliera furono scaraventati da una mareggiata a 50 m di distanza. Blocchi da 100 tonn. posti nel 1913 sulla diga foranea di Holyhead (nel Galles) furono trovati spostati dopo una

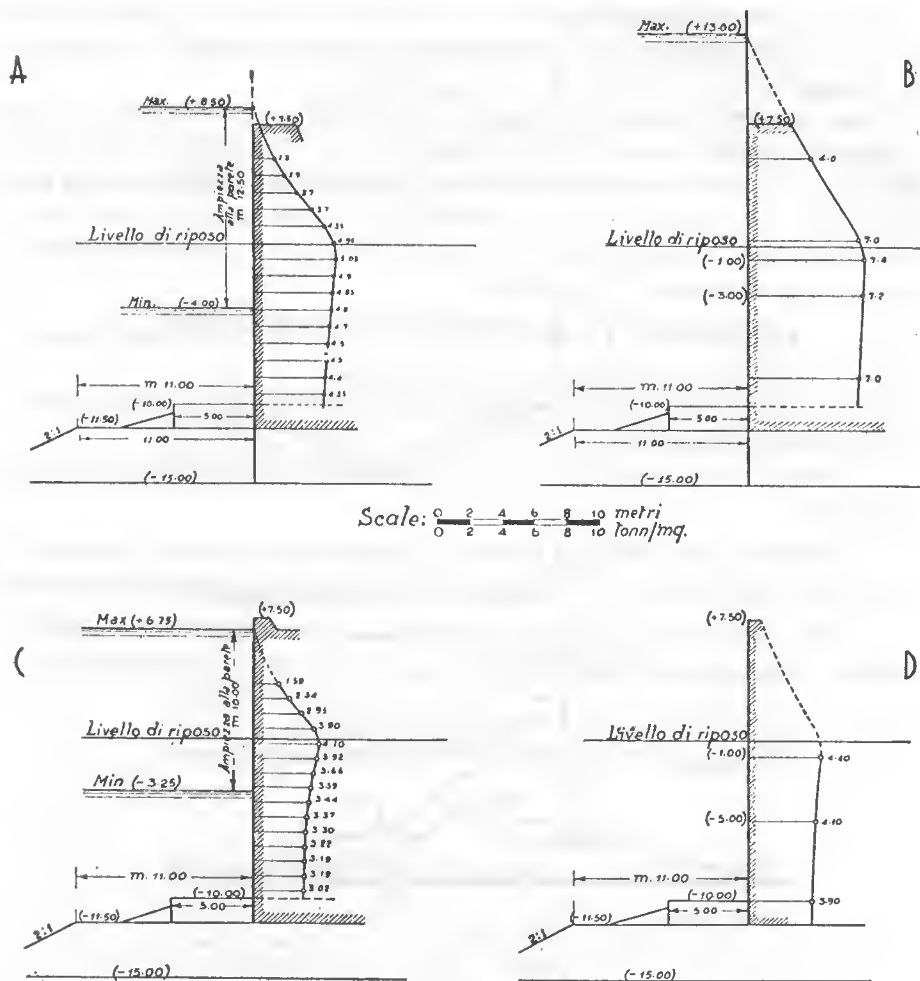


Fig. 4 - Molo Principe Umberto del porto di Genova:

A) Esperienze su modello: onda trocoidale $2h = m\,5$; $2\,L = m\,110$:
B) Esperienze su modello: onda trocoidale $2\,h = m\,7$; $2\,L = m\,150$ (sfioro sulla parete);
C) Esperienze su modello: onda stazionaria con interferenza di due onde $2\,h = m\,5$; $2\,L = m\,110$:
D) Misure dirette (12 marzo 1934-XII) $2\,h = m\,4{,}50$; $2\,L = m\,110$.

(Dal Ferro) «Giornale del Genio Civile», 1936.

tempesta ed il molo fu completato con blocchi da 280 tonn. Al porto di Wick (nel mare del Nord, sulla costa nord-orientale della Scozia, in un paraggio molto esposto) fu spostato da una tempesta, nel 1873, un masso di 2600 tonn. (1).

---

(1) Cfr. H. F. Cornick, Dock and Harbour Engineering Ch. Griffin & Co Ltd. London (in 4 volumi) vol. II (1959), pp. 147 e segg.

Tutte queste informazioni lasciano qualche incertezza, perché non collegate con la posizione dei massi stessi su le dighe né con la esposizione dei paraggi (e in particolare con il loro fetch).

Ma i disastri relativi alle dighe a gettata hanno un significato ancor più limitato; quelli italiani (Gela, 1955 e Sibari, novembre 1969) sono tutti e due dovuti a sprofondamento del fondale che a Gela é avvenuto dopo una mareggiata e a Sibari in fase di costruzione. Si deve insistere perciò solo su le dimensioni dei massi esterni, che, come si è già detto, sono determinate per analogia con opere già costruite.

5. — Più istruttivo è l'elenco dei disastri più noti nei moli a parete verticale e del tipo misto.

Dato che ci riferiamo a porti del Mediterraneo considereremo soltanto opere di quest'ultimo tipo.

I disastri, per i quali sono state individuate le probabili cause, sono i seguenti:

Febbraio 1930 – Molo di Catania, a piloni di massi ciclopici (in costruzione). Danneggiato per lo slittamento dei massi degli strati superiori.

Marzo 1933 – Molo orientale di Catania, a piloni di massi ciclopici (in esercizio). Distrutto per lo slittamento dei massi degli strati superiori (v. fig. 5).

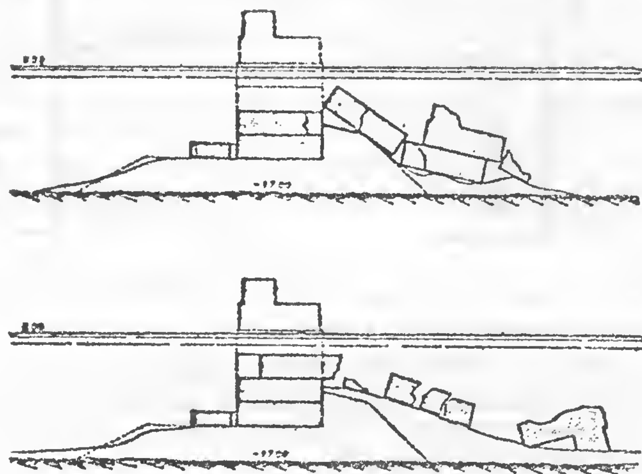


Fig. 5 - Sezioni caratteristiche dei ruderi del molo orientale di Catania, distrutto dalla mareggiata del marzo 1933 (da Coen-Cagli).

Febbraio 1934 – Diga Mustafà ad Algeri, a piloni di massi (v. fig. 6). Distrutta per erosione del fondale e crollo in avanti della diga.

Febbraio 1955 – Diga foranea a Genova, a piloni di massi. Danneggiata per slittamento dei massi degli strati superiori dopo il crollo delle sovrastrutture.

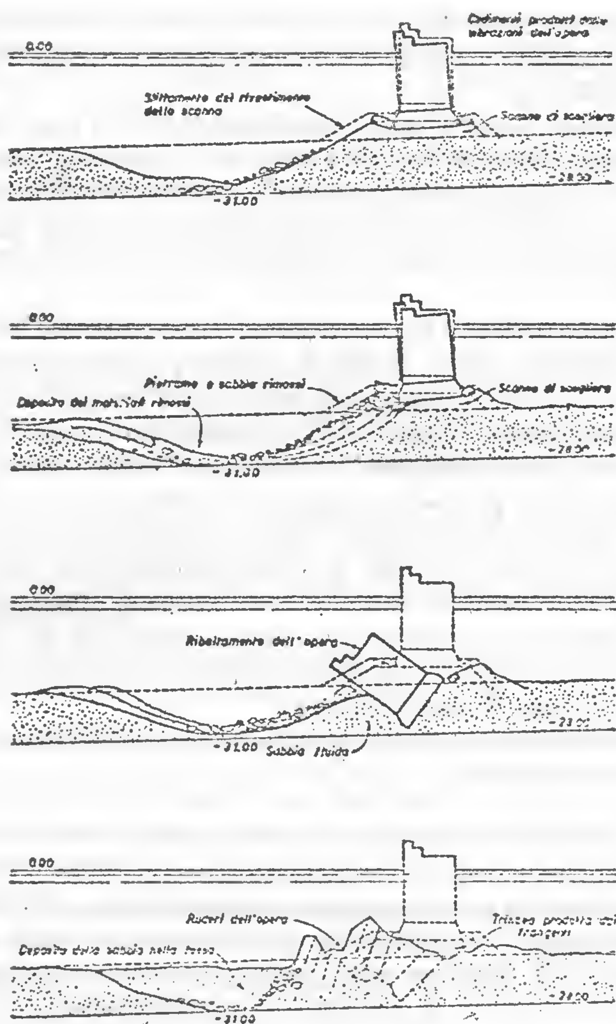


Fig. 6 - Fasi finali della distruzione del II° braccio della diga Mustafà di Algeri, avvenuta durante la mareggiata del febbraio 1934 (da Cunnighan).

Ottobre 1973 – Diga foranea di Palermo (a piloni di massi).

Dicembre 1974 - Diga foranea di Bari (a piloni di massi).

Non annovero tra i disastri delle dighe a parete verticale la diga di Biserta (costruita a cassoni cellulari) perché in seguito ai danni subiti in una mareggiata fu ricostruita nel 1905 inglobando i cassoni in una gettata. Quando la diga crollò (nel 1915) non si poteva più ritenerla a parete verticale.

6. — Da quanto si è esposto risulta chiaramente che non sempre le dighe a parete verticale si sono mostrate sufficientemente resistenti alle

più forti mareggiate per le quali tuttavia era stato effettuato il calcolo. Resta così il dubbio se il disastro sia dovuto a difetti costruttivi o a deficienze di calcolo.

Il modo come le dighe hanno ceduto all'azione del mare non è sempre completamente indicativo; lo slittamento dei massi degli strati superiori mostra che il collegamento tra di essi non era sufficiente, ma dove vi era un cassone monolitico (o dove il collegamento tra i massi era mantenuto da piloni rinforzati da elementi metallici) si è avuto il crollo in avanti della diga.

I progressi tecnologici hanno eliminato molte difficoltà che si avevano in campo costruttivo (per es. quella di riempire i cassoni in tempo sufficientemente breve per poter essere quasi sicuri che il mare si mantenga calmo durante il riempimento; l'usare per il riempimento la sabbia invece del calcestruzzo per poter alleggerire il cassone che si sia spostato, il portare la parete verticale a profondità maggiore — almeno due volte l'ampiezza dell'onda — perché a questo livello l'onda ha perduto la sua violenza, etc.). Forse rimane ancora la difficoltà della manutenzione (che nei moli a gettata è semplice — anche se molto onerosa) perché è difficile riportare alle condizioni primitive (o sostituire) un masso ciclopico o un cassone lesionato, ma non si può asserire che le dighe distrutte dalle mareggiate fossero in cattive condizioni di manutenzione.

Resta quindi come problema fondamentale quello di dimensionare una diga a parete verticale.

7. — La larghezza delle dighe a parete verticale è di solito calcolata. Si parte dalla conoscenza dell'ampiezza dell'onda al largo che indichiamo con A. Si considera la soluzione di prima approssimazione di Stokes relativa alle onde stazionarie (cioè alle onde di « clapotis » per usare una classica parola francese); la pressione sulla parete verticale è allora rappresentata dal diagramma della fig. 4. Tuttavia la sopraelevazione A sul livello di riposo (dovuto al fatto che l'onda è stata linearizzata) non è ritenuta sufficiente; si ammette che la sopraelevazione possa raggiungere il valore $3/2\ A$ pur rimanendo la pressione al livello di riposo uguale ad A (ed anche al fondo uguale ad A). Tale risultato è confermato da esperienze su modello fisico eseguite tra gli altri anche dal Ferro fin dal 1936 (²).

Resta poi da calcolare la sottopressione sullo scanno: questa può raggiungere il valore di $3/2\ A$ (sul lato mare) e, come si ritiene usualmente, il valore zero (a lato porto).

(²) G. Ferro, Sull'azione delle onde contro le opere marittime di difesa a parete verticale. Annali dei Lavori Pubblici (1936), pp. 734-781 e 935-947.

Recenti esperienze del prof. Enrico Marchi hanno però mostrato che non è sempre così. Egli ha utilizzato una stazione di misura del nuovo porto di Genova-Voltri ed un modello eseguito nel suo Istituto alla Facoltà di Ingegneria di Genova; è risultato che non sempre la sottopressione raggiunge il valore zero al fondo della diga (lato porto) ma che a volte resta notevolmente superiore; il fenomeno è dovuto al fatto che le piccole onde, trasmettendosi attraverso i meati dello scanno, a poco a poco, ostruiscono i meati stessi; occorrerebbe dunque evitare questo fenomeno per ottenere la decrescenza lineare ed eliminare così un incremento notevole delle sottopressioni. In caso che ciò sia impossibile occorre tener conto di sottopressioni quasi costanti al fondo. Su questo argomento lo stesso prof. Marchi (che ha eseguito le esperienze e le ha comunicate al Congresso internazionale dell'AIRH tenutosi nell'Agosto 1975 a S. Paolo del Brasile) sta redigendo una relazione con precise valutazioni analitiche.

8. — Ma una questione che deve essere ancora risolta è quella di sapere se il procedimento adottato per il calcolo della parete verticale (e fondato sulla soluzione di prima approssimazione delle onde irrotazionali) sia sufficientemente cautelativo.

Tenuto conto dei coefficienti di sicurezza adottati in questi problemi dall'ingegnere i rilievi sperimentali mostrano:

1) che l'azione dell'onda sulla parete verticale è abbastanza vicina a quella che si calcola con la impostazione irrotazionale se si può essere sicuri che manchi il frangimento (e cioè che l'altezza e la lunghezza dell'onda al largo e in vicinanza della parete permettano all'onda stessa di conservarsi « onda di oscillazione »;

2) che in corrispondenza del frangimento si hanno degli sforzi molto più notevoli; tanto che in questa eventualità le pressioni determinate in 1) si chiamano « pressioni secondarie »; le pressioni indotte dal frangimento si chiamano invece « pressioni di shock ».

9. — Le « pressioni di shock » e le « pressioni secondarie » sono indicate schematicamente nella fig. 7; si deve aggiungere allo schema la notizia che le onde di shock hanno durata molto breve mentre le pressioni secondarie hanno durata maggiore.

A partire dal 1904 (quando il Gaillard considerò per la prima volta le pressioni di shock) molti schemi matematici sono stati suggeriti, ma essi conducono, anche a partià di condizioni, a risultati molto diversi tra loro. Recentemente (cioè a partire dal 1966) sono stati proposti schemi a carattere probabilistico che sembrano interpretare meglio le pressioni di shock. Infatti un treno d'onde, anche se abbastanza regolare, quando investe, in condizioni di frangimento una diga a parete verticale, presenta, di solito,

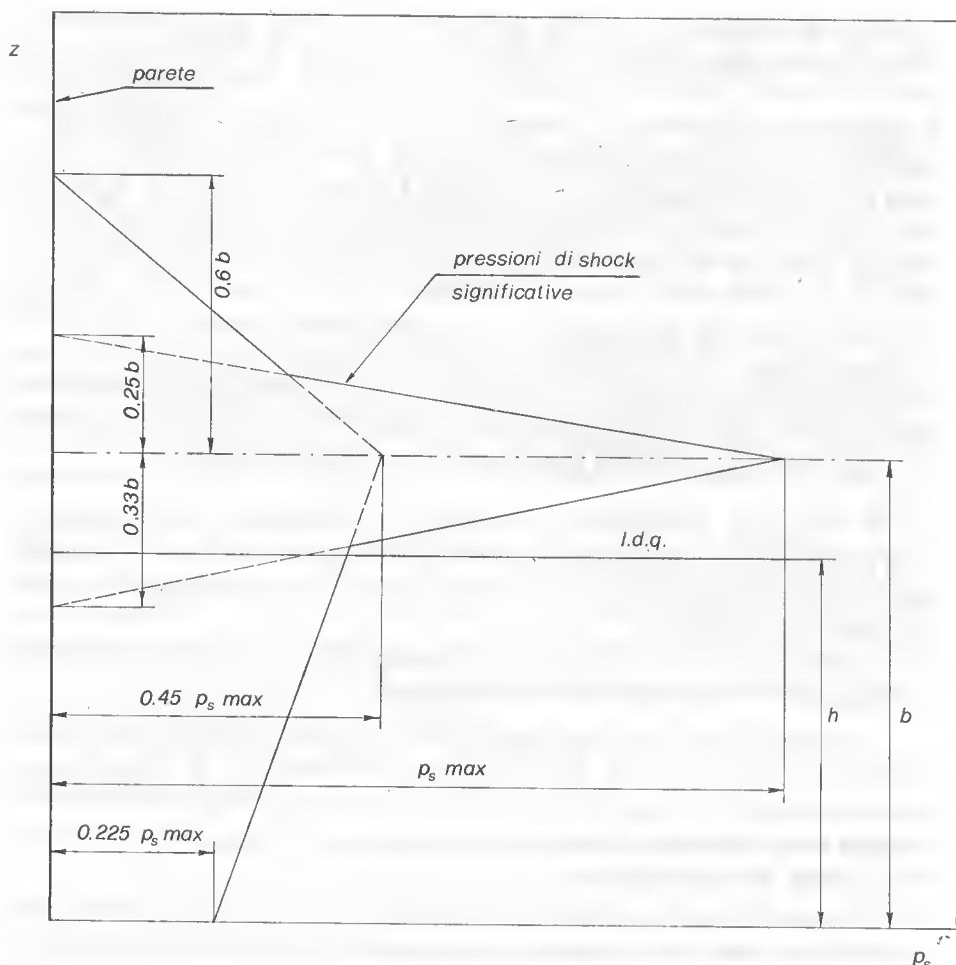


Fig. 7.

differenti aspetti dei fronti d'onda all'impatto in conseguenza delle diverse condizioni che si stabiliscono davanti alla diga verso mare e che interferiscono in modo del tutto casuale con i vari fenomeni locali (riflessioni d'onde, correnti di ritorno, spruzzi d'acqua ecc.). Da questo discende il carattere stocastico delle pressioni di shock.

10. — Il prof. Giulio Scarsi ed il prof. Sandro Stura (anch'essi di Genova e allievi del prof. Marchi) hanno svolto nel 1974 una ricerca di tipo probabilistico che ha consentito di precisare un modello sia per le pressioni di shock che per le pressioni secondarie di una diga a parete verticale non tracimabile costruita su fondali a dolce acclività, fissi e non scabri (almeno nella zona di frangimento).

Il modello che considera la pressione di shock fa riferimento alla « pressione di shock significativa » (cioè alla pressione che ha come valore la media del terzo più alto della pressione di shock) e fornisce gli elementi per determinare questa pressione alle varie quote. Sorvolando sui particolari dell'attrezzatura sperimentale si ricava che, in base a ricerche preliminari, fu ritenuto sufficiente, per ottenere un valore attendibile della pressione di shock, di eseguire in ogni punto preso in esame, cento rilievi di pressione. Tra questi erano scelti i valori significativi. Una successiva ricerca di best-fit condotta su tutte le serie di prove ha consentito di stabilire le seguenti equazioni (nelle quali p_s è la pressione significativa e b è la quota alla quale si localizza la $p_{s\ max}$)

$$ps = p_{s\ max} \quad (5 - 4\,y/b) \qquad \text{per} \quad 1 \leq y/b \leq 1{,}17$$

$$p_s = p_{s\ max} \quad (-2 + 3\,y/b) \qquad 0{,}8 \leq y/b \leq 1{,}00$$

$$p_s = 0{,}750\,p_{s\ max}\,(1{,}6 - y/b) \qquad \text{per} \quad y/b > 1{,}17$$

$$p_s = 0{,}225\,p_{s\ max}\,(1 + y/b) \qquad y/b < 0{,}8$$

Qui y è la coordinata verticale cui si riferisce la p_s misurata dal piede della parete verticale e positiva verso l'alto.

Altri valori relativi alle pressioni secondarie sono stati assegnati dai proff. Scarsi e Stura ma ad essi si giunge anche col calcolo matematico.

11. — In conclusione mi sembra si possa oggi confermare la necessità di una maggior prudenza nel calcolo delle opere di difesa, specie quando ci si trovi con profondità del mare per le quali sia possibile il frangimento delle onde. La utilizzazione di procedimenti stocastici non dà la sicurezza assoluta della resistenza delle dighe (tanto più che ci si ferma alla valutazione di « pressioni significative ») ma forse una sicurezza assoluta è impossibile e forse anche risulterebbe eccessivamente costosa. Mi riferirò a questo proposito a un esempio di altro tipo (ma sempre idraulico): nella costruzione degli argini della Schelda gli Olandesi hanno accettato la probabilità di una rotta ogni 110 anni; il passare a 120 anni avrebbe imposto un costo tale da rendere del tutto antieconomico il vantaggio temporale ottenuto.

ETTORE ANTONA (*)

A perturbation approach to several eigen value-eigen function problems.

Summary. — *A general perturbation approach to linear eigen solution problems is presented, which permits the calculation of the effects of finite amount perturbations.*

The problems mainly involved are concerned with the vibrations of structures subject to stability limit phenomena. Substantially the work can be presented as a method for obtaining the stability critical modes from the unloaded structure vibration modes.

Attcntion is paid to the case of multiple vibration eigenvalues.

The assumption that perturbed eigenvalues and eigenfunctions can be expanded by series of the perturbation parameter is not requested.

The finite perturbation can be applied also when it causes the passage from real to complex eingevalues.

A reiteration process loses such capability but permits casy evaluations in order to obtain solution of wanted approximation.

Some easy practical sample problems are reported.

1. — Introduction.

The " perturbation theory " is a way to obtain approximations up to any desired level of eigenfunctions and eigenvalues of a linear problem, corresponding to a perturbed differential equation (system), when eigenfunctions and eigenvalues of the non-perturbed linear differential equation (system), with the same boundary conditions and domain are known.

As " perturbed " differential equation (system) is to be intended the original equation (system) in which a coefficient of terms of an order lower than the maximum is changed of a small quantity, which is taken as reference for the infinitesimal order analysis.

In the classical approaches, see [1], problems are considered where the eigenvalue are multiplication factors of the unknown (vector) function

(*) Politecnico di Torino.

w, and the perturbation is made-up by a variation of a term of zero differential order, i.e. a product between the unknown function and a given function.

In such conditions the usual approach gives, [1], approximations for eigenvalues and eigensolutions of the perturbed problem by means of the determination of the perturbations of the various increasing ordcrs.

On the other hand in the literature are reported, [2], also cases of eigensolution problems, in which the perturbation concerns the variation of the multiplication factor of a linear or a quasi-linear differential operator, but where the perturbation approach is limited to the determination of the first order variation of eigenvalues and eigensolutions.

The first idea of this work is concerned with the problems defined in a real domain A by differential equations:

$$\mathfrak{L}(w) + PL(w) + \lambda Bw = f \qquad (\text{on } A) \tag{1'}$$

with the boundary conditions

$$\mathfrak{C}_i(w) = 0 \qquad (\text{on } \partial A) \tag{2}$$

The parameter λ that is subject to have eigenvalues, in the case of homogeneous equation (system) is multiplied by Bw, where B is a given (vector) function and, that is more important, the perturbation is obtained by means of the variation of the multiplication factor of a linear differential operator $L(w)$ operating on the unknown (vector) function w and having an order less than the differential ordcr of the equation (system).

In such a way the performed analysis allows us to obtain, by repetitions of finite step, the solution of problems like the determination of the critical load levels and of the corresponding critical modes of a structure analyzed at the stability limits by means of linearized equilibrium equations, if the undamped vibration frequencies and modes of the unloaded structure are known in the same constraint conditions.

Beside other assumptions, the usual perturbation approaches of this type are based on the hypothesis that the perturbed eigenvalues and eigenfunctions can be expanded by series of the perturbation parameter. In this work such an assumption is not necessary. On the other hand the various order contributions to the perturbations are not separated between them, but the perturbations in the whole are analyzed in a way that allows us to obtain a desired approximation of a finite step perturbed problem.

With a finite number of finite step it is possible to obtain also very large changes in the perturbation parameter.

The present work is strictly confined to the cases where 1') and 2), as an operator that transforms the f's into the Bw's, both being elements of a space where is defined the scalar product $(w_1, w_2) = \int_A \bar{w}_1 B w_2 dA$, is a compact hermitian operator during the all considered range of P. This limitation is due to the fact that, as regards such operators, the existence of eigenfunctions and (real) eigenvalues and the completeness of the eigenfunctions is demonstrated by well known theorems.

In spite of the fact that the more frequent applications of eigenfunction-eigenvalue concepts lie in the real field, for the sake of generality this work is concerned with differential operators and boundary conditions, having complex coefficients. They constitute operators that change complex vector functions f's into complex vector functions Bw's.

The reduction to the real field is obvious.

2. — Definition of the Problems.

Let us consider a linear differential equation (system) with homogeneous boundary conditions that constitute a compact hermitian operator, independently from the (real) values of P and λ. As a " sample problem " in the real field we can use the general linearized formulation of the problem concerning an elastic conservative system, under the form of equilibrium equations.

Let

$$\mathfrak{L}(w) + PL(w) + \lambda Bw = 0 \tag{1}$$

be the corresponding homogeneous system, having the boundary conditions

$$\mathfrak{C}_i(w) = 0 , \tag{2}$$

being $w = w(x)$ and x a real domain. The problem (1) and (2) has eigenvalues in λ with the corresponding eigenfunctions. Let A_{λ_n} be the eigenset associated to λ_n, of multiplicity k_n. If $W_{n,k}$ is an orthonormal reference system established in A_{λ_n}, the (vector) functions $W_{n,k}$ themselves, arranged according to λ_n and according to k inside each A_{λ_n}, make up an orthonormal complete system. The λ_n's and $W_{n,k}$'s are functions of P:

$$\lambda_n = \lambda_n(P) \ ; \quad W_{n,k} = W_{n,k}(P) \ .$$

The completeness of $W_{n,k}$'s for a given value of P permits to develop (expand) by series the $W_{n,k}$'s for a different value of P. In which way to obtain such an expansion is one of the results of the present work. Another result is the possibility of obtaining eigenvalues in P and respective eigenfunctions, starting from eigenvalues in λ and respective eigenfunctions.

3. — Basic Considerations.

Let us resolve $PL(W^P_{n,k})$ as follows

$$PL(W^P_{n,k}) = Pa^P_{n,k}BW^P_{n,k} + \Psi^P_{n,k} \tag{3}$$

where

$$Pa^P_{n,k} = \frac{\int_A \overline{W}^P_{n,k} PL(W^P_{n,k})\, dA}{\int_A \overline{W}^P_{n,k} BW^P_{n,k}\, dA}$$

results a real value if PL and B are both self adjoint, and therefore where $a^P_{n,k}$ is a real coefficient and $\Psi^P_{n,k}$ is a function orthogonal [1] to $W^P_{n,k}$. Owing to (1), we have also [2]

$$\mathfrak{L}(W^P_{n,k}) = b^P_{n,k}BW^P_{n,k} - \Psi^P_{n,k} \tag{4}$$

where $b^P_{n,k}$ is another coefficient, such that

$$Pa^P_{n,k} + b^P_{n,k} = -\lambda^P_n\,. \tag{5}$$

The function $\mathfrak{L}(w)$, where w satisfies the boundary conditions, is the distribution of f (equilibrium external forces in the sample problem) at $\lambda = 0$ and $P = 0$, associated with w itself, while $\mathfrak{L}(w) + PL(w)$ is the same distribution at $\lambda = 0$ and at a given value of P. If between such functions and also between $L(W)$ and W the following reciprocities (symmetries) exists:

$$\int_A W_i \mathfrak{L}(W_j)\, dA = \int_A W_j \overline{\mathfrak{L}(W_i)}\, dA\,, \tag{6}$$

$$\int_A W_i L(W_j) dA = \int_A W_j \overline{L(W_i)} dA\,, \tag{7}$$

therefore, if we put $W^P_{n,k}$ as W_i and $W^P_{m,h}$ as W_j $(n \neq m,\ k \neq h)$, it is

$$\int_A \overline{W}^P_{n,k}(b^P_{m,h}BW^P_{m,h} - \Psi^P_{m,h})dA = \int_A W^P_{m,h}(\overline{b^P_{n,k}BW^P_{n,k} - \Psi^P_{n,k}})dA$$

$$\int_A \overline{W}^P_{n,k}(Pa^P_{m,h}BW^P_{m,h} + \Psi^P_{m,h})dA = \int_A W^P_{m,h}(\overline{Pa^P_{n,k}BW^P_{n,k} + \Psi^P_{n,k}})dA$$

---

(1) $\int_A \overline{\Psi}^P_{n,k} BW^P_{n,k} dA = 0$. If c is a complex entity $\bar{c}$ is its conjugate.

(2) The index P means that the function is evaluated at a given value of P.

Subtracting the first from the second one, these two equations reduce to

$$\int_A \overline{W}^P_{m,h} \Psi^P_{n,k} dA = \int_A W^P_{n,k} \overline{\Psi}^P_{m,h} dA \tag{8}$$

Expanding now each $\Psi^P_{m,h}$ by series of $BW_{n,k}$ ($c^P_{m,h;n,k}$ are real coefficient)

$$\Psi^P_{m,h} = \sum_{n,k} c^P_{m,h;n,k} BW^P_{n,k} \quad (c^P_{n,k;n,k} = 0)$$

one obtains

$$c_{m,h;n,k} = c_{n,k;m,h} \tag{9}$$

because of (8) and orthogonality of the $W^P_{n,k}$.

On the other hand, owing to the definition of

$$c_{m,h;n,k} = \frac{\int_A \overline{W}_{n,k} PL(W_{m,h}) dA}{\int_A \overline{W}_{n,k} BW_{n,k} dA},$$

if PL and B are self-adjoint, we have $c_{m,h;n,k} = \bar{c}_{n,k;m,h}$. Therefore the $c_{m,h;n,k}$ are real.

Let us now consider the eigenfunctions associated with $P + \Delta P$ and assume that each eigenvalue $\lambda^{P+\Delta P}$ tends to λ^P, when ΔP tends to zero, and likewise each $W^{P+\Delta P}$ tends to a linear combination of the W^P's. In such a case, for each $W^{P+\Delta P}_{n,r}$ (let them be in number of r_n) one can put [3]

$$W^{P+\Delta P}_{n,r} = \textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k} + \widehat{W}_{n,r} \tag{10}$$

where $\widehat{W}_{n,r}$ is infinitesimal compared with $W^{P+\Delta P}_{n,r}$ and expandable as follows [4]

$$\widehat{W}^{P+\Delta P}_{n,r} = \textstyle\sum_{p,q} d^r_{p,q;n} W^P_{p,q}, \quad (p \neq n) \tag{11}$$

---

(3) We shall indicate with $\lambda_n + (\Delta\lambda_n)_r$ the respective eigenvalue. The symbol Δ indicates the change of a derived quantity corresponding to a change ΔP. The symbol d indicates the principal infinitesimal in the case of P ($dP = \Delta P$) or the first order infinitesimal or principal part of Δ of a derived quantity.

(4) We have, when $p = n$, $d^r_{n,q;n} = 0$. If it is possible to find an operator B^{-1} such that $B^{-1}Bw = w$ i.e. if B is invertible, also the W's constitute a complete system. In fact to each $\widehat{W}_{n,r}$ corresponds a function $B\widehat{W}_{n,r}$, which can be expanded by series of BW's:

$$B\widehat{W}_{n,r} = \Sigma_{p,q}\, d^r_{p,q;n}\, BW^P_{p,q}$$

we have:

$$B^{-1}B\, \widehat{W}_{n,r} = \widehat{W}_{n,r} = \Sigma_{p,q}\, d^r_{p,q;n}\, W^P_{p,q}$$

As ΔP tends to zero also the $d^r_{p,q;n}$ tends to zero, but equation (11) and (10) are valid also in the case of a finite increment $dP = \Delta P$. Also between $W^{P+\Delta P}_{n,r}$ and $W^{P+\Delta P}_{m,s}$ we have the orthogonality

$$\int_A W^{P+\Delta P}_{n,r}\, B W^{P+\Delta P}_{m,s}\, dA = 0 \qquad (n \neq m) \tag{12}$$

If (10) is introduced in (12) we have

$$\int_A (\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k} + \hat{W}_{n,r}) B\, (\textstyle\sum_h h^s_{m,h} W^P_{m,h} + \hat{W}_{m,s}) dA = 0 \tag{13}$$

which, taking into account the orthogonality of the $W^P_{n,k}$'s, can be put into the form

$$\int_A [\hat{W}_{n,r} B(\textstyle\sum_h h^s_{m,h} W^P_{m,h}) + \hat{W}_{m,s}(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k}) + \hat{W}_{n,r} B \hat{W}_{m,s}] dA = 0$$

and introducing (11)

$$\int_A [(\textstyle\sum_{pq} d^r_{p,q;n} W^P_{pq}) B(\textstyle\sum_h h^s_{m,h} W^P_{m,h}) +$$
$$+ (\textstyle\sum_{tz} d^s_{t,z;m} W^P_{t,z}) B(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k}) + \hat{W}_{n,r} B \hat{W}_{m,s}] dA = 0 \tag{14}$$

Taking now into account the orthonormality of $W^P_{n,k}$ functions, disregarding terms of higher infinitesimal order, one obtains:

$$\textstyle\sum_h d^r_{m,h;n} h^s_{m,h} = - \sum_k d^s_{n,k;m} h^r_{n,k} \tag{15}$$

On the other hand the $W^{P+\Delta P}_{n,r}$'s satisfy equation (1). Therefore we have

$$\mathfrak{L}(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k} + \hat{W}_{n,r}) + (P + \Delta P) L(\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k} + \hat{W}_{n,r}) +$$
$$+ [\lambda_n + (\Delta\lambda_n)] B(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k} + \hat{W}_{n,r}) = 0 \tag{16}$$

Also the functions $W^P_{n,k}$'s satisfy equation (1). Remembering (11) and (3) too, one obtains

$$\mathfrak{L}(\hat{W}_n) + PL(\hat{W}_n) + \lambda_n B(\hat{W}_{n,r}) = - \Delta P L(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k}) +$$
$$- (\Delta\lambda_n)_r B(\textstyle\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k}) + - \Delta P L(\sum_{pq} d^r_{p,q;n} W^P_{pq}) - (\Delta\lambda_n)_r B(\sum_{pq} d_{p,q;n} W^P_{p,q}) \tag{17}$$

Owing to equation (1) and to the fact that each $W^P_{p,q}$ satisfies (1) at $\lambda = \lambda_p$, the left hand (L.H.S.), side of (17) becomes

$$\text{(L.H.S.)} = \textstyle\sum_{p,q} d^r_{p,q;n} (\lambda_n - \lambda_p) B W^P_{p,q}\,.$$

Instead the right hand side (R.H.S.), introducing equation (3), becomes

$$(\text{R.H.S.}) = -\sum_k \Delta P h^r_{n,k}\left(a^P_{n,k} B W^P_{n,k} + \frac{1}{P}\sum_{pq} c^P_{n,k;p,q} B W^P_{p,q}\right) +$$

$$- dP \sum_{p,q} d^r_{p,q;n}\left(a^P_{p,q} B W^P_{p,q} + \frac{1}{P}\sum_{t,z} c^P_{p,q;t,z} B W^P_{t,z}\right) +$$

$$- (\Delta\lambda_n)_r B\left(\sum_k h^r_{n,k} W^P_{n,k}\right) - (\Delta\lambda_n)_r B\left(\sum_{pq} d^r_{p,q;n} W^P_{p,q}\right) .$$

This (R.H.S.) can be put also into the following form

$$(\text{R.H.S.}) = \sum_{pq} e^r_{p,q;n} B W^P_{p,q}$$

if one writes

$$e^r_{p,q;n} = \begin{cases} -\sum_k \dfrac{\Delta P}{P} h^r_{n,k} c^P_{n,k;\,p,q} - (\Delta\lambda_n)_r d^r_{p,q;n} - \Delta P\{ d^r_{p,q;n} a^P_{p,q} + \\ \qquad + \dfrac{1}{P}\cdot \sum_{t,z} d^r_{t,z;n} c^P_{p,q;\,t,z}\} \quad (n \neq p) \\ -\sum_k \dfrac{\Delta P}{P} h^r_{n,k} c^P_{n,k;\,n,q} - \Delta P h^P_{n,q} a^P_{n,q} - \Delta\lambda_{nr} h^r_{n,q} - \dfrac{\Delta P}{P}\cdot \\ \qquad \cdot \sum_{t,z} d^r_{t,z;n} c^P_{p,q;\,t,z} \quad (n = p) \end{cases}$$

Therefore one obtains

$$\sum_{p,q} d^r_{p,q;n}(\lambda_n - \lambda_p) B W^P_{p,q} = \sum_{p,q} e^r_{p,q;n} B W^P_{p,q} ,$$

and subsequently

$$d^r_{p,q;n}(\lambda_n - \lambda_p) = e^r_{p,q;n} \tag{18}$$

When we considere only a finite number of eigensolutions $(\lambda_n, W_{n,k})$ (for instance the first $\bar{n}$) and disregard the effects of the remaining eigensolution $(n > \bar{n})$, the equations (18) make up an algebraic system in which $h^r_{n,k}$, $(\Delta\lambda_n)_r$ and $d^r_{p,q;n}$ are the unknowns. Such equations do not include known terms; each of them includes only terms which are linear or rectangular as regards the unknowns themselves. If n, p, t and m have a bounded range (i.e. $= 1, 2, \ldots, \bar{n}$), the system (18) contains $\bar{n}(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{\bar{n}}^2)$ equations. The $h^r_{n,k}$ are in number of $k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{\bar{n}}^2$; the $(\Delta\lambda_n)_r$ are in number of $\bar{n}(k_1 + k_2 + \cdots + k_{\bar{n}})$; the $d^r_{p,q;n}$, taking into account that $d^r_{p,q;p} = 0$, are in number of $(\bar{n} - 1)\,(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{\bar{n}}^2)$. Altogether the unknowns are in number of

$$\bar{n}(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{\bar{n}}^2) + \bar{n}(k_1 + k_2 + \cdots + k_{\bar{n}}) .$$

Other $\bar{n}$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_{\bar{n}})$ equations are necessary in order to define the problem. These equations are the normality conditions

$$\| W_{n,r}^{P+dP} \| = 1 \tag{19}$$

From a practical point of view we can also fix the values of $\bar{n}(k_1 + k_2 + + \cdots + k_{\bar{n}})$ unknowns, for instance one of the $h_{n,k}^r$ per each $W_{n,r}^{P+\Delta P}$, and determine the remaining unknowns as functions of the fixed ones [5].

The approximation obtainable when n, p, t are bounded to $\bar{n}$ corresponds to a problem where the $n > \bar{n}$ degrees of freedom are constrained in an infinite way, so that $(\lambda_n)_{n>\bar{n}} = \infty$ [see. eqs. (18)]. This implies that the perturbed problem eigenvalues approximated by the proposed procedure are higher than the true ones, because of the limitation $\bar{n}$, and tend to the true value as $\bar{n}$ increases.

For the sake of brevity this circumstance is analitically verified in the case of only simple eigenvalues (see par. 6).

4. — The Asimptotic Behaviour.

The behaviour of the solution of the suggested problem, when ΔP tends to zero, can be analyzed in the following manner. From equation (18), if we omit the terms which are surely of the second order when ΔP tends to zero, at $p = n$ we have at each value of r:

$$d_{n,q}^r(\lambda_n - \lambda_n) = 0 ,$$

$$0 = -h_{n,1}^r \frac{1}{P} c_{n,1;n,q}^P + \cdots - h_{n,q}^r \left[a_{n,q}^P + \frac{d\lambda_n}{dP} \right] + \cdots - h_{n,k_n}^r \frac{1}{P} c_{n,k_n;n,q}^P$$

$$(q = 1, \ldots, k_n) \tag{19}$$

The equations (19) make up a system of k_n algebraic equations, which are linear and homogeneous, with the k_n unknowns $h_{n,k}^r$ $(k = 1, \ldots, k_n)$, per each value of r. The system (19) is an invariant for respect to changes in the values of r. Such a system has solutions not identically null only if the coefficient determinant of the system itself is zero:

$$0 = \det \left| (-) \frac{1}{P} c_{n,1;n,q}^P \cdots - dPa_{n,q}^P + \frac{d\lambda_n}{dP} \cdots - \frac{1}{P} c_{n,k;n,q}^P \right| \tag{20}$$

---

(5) Using equations (19), one can normalize the $W_{n,r}^{P+\Delta P}$

This is an algebraic equation, with the unknown $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)$ and whose degree is k_n. One has k_n values for $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)$, and from each of them we can obtain the $h^r_{n,k}$ [6], using the system (19). The $h^r_{n,k}$ and $\frac{d\lambda_n}{dP}$ result real. In fact the system (19) is an eigenvalue problem. The symmetry of matrix $c_{n,\alpha;n,\beta}$ for respect to α and β beside the symmetry and the positivity of the coefficient of $\frac{d\lambda_n}{dP}$ are sufficient conditions in order to have real eigenvalues $\frac{d\lambda_n}{dP}$, [3].

If a solution $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)_i$ of equation (20) has multiplicity $k_{i,n}$ the system (19), at this value, gives solutions which are a linear variety, obtainable as a linear combination of $k_{i,n}$ functions. Within this space we can put an orthonormal reference. Therefore, because of an increment dP the k_n functions $W_{n,k}$, having eigenvalue λ_n, change into k_n functions gathered as variety, each of which has one of the eigenvalues $\lambda_n + (d\lambda_n)_i$ and contains $k_{i,n}$ functions.

If it is possible to choose the $W^P_{n,k}$ in such a way that

$$\int_V \overline{W}_{n,i} B \Psi_{n,j} dV = 0 \qquad (i \neq j) \tag{21}$$

i.e. if it is possible to have

$$c_{n,i;n,j} = 0 \qquad (i \neq j) \tag{22}$$

(orthogonality between $\Psi_{n,j}$ and $W_{n,i}$), the system (19) can be considered directly a set of k_n separated equations in the $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)_r$ unknown, which give

$$(d\lambda_n)_q = - dP a^P_{n,q} \tag{23}$$

These considerations are a generalization of the results indicated in [1], but it is possible to adjoin the following further observations.

If a particular choise of $W^P_{n,k}$ gives a determinatal equation (20) that can be reduced to a form

$$\det A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_e = 0$$

---

(6) Affected with a multiplication factor independent on r.

where $A_1, \ldots, A_e$ are square matrices of ranks $R_1, \ldots, R_e$ respectively $(R_1 + \cdots + R_e = k_n)$ and when the dots indicate determinant products in the set of the k_n solution for $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)$ the solution of det $A_{e_i} = 0$ $(e_i = 1, \ldots, e)$ constitute a sub-set that concerns only the group of $W^P_{n,k}$ whose $a^P_{n,k}$ are contained in A_{e_i}. The $W^{P+dP}_{n,k}$ deriving from such group do not contain W^P's of different groups. The case $c_{n,i;n,j} = 0$ $(i \neq j)$ is the limit case of such type of particular choise of $W^P_{n,k}$, where each A_{e_i} is of rank one and contains only a $a^P_{n,k}$.

It is usefull to observe that the set solutions in $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)$ is an invariant for respect to the choise of the $W^P_{n,k}$ in the eigenset associated with λ_n and that the search of particular choises has the end of finding groups of functions or functions that are each independent from the remaining ones during the evolution from P to $P + dP$.

Referring to the case (22) $c_{n,i;n,j} = 0$ $(i \neq j)$, in order to determine the $h^r_{n,q}$, for each value $(d\lambda_n)$ we have

$$h^r_{n,j} = 0 \qquad (j \neq q) \qquad a^P_{n,q} \neq a^P_{n,j}$$

The set of the $W^P_{n,j}$ $(j = 1, \ldots, \alpha)$ for which $a^P_{n,j} = a^P_{n,q}$ (included of course the same $W^P_{n,q}$), constitute a reference for a linear space that has the same $\left(\frac{d\lambda_n}{dP}\right)$ and for which the $h^r_{n,j}$ $(r = 1, \ldots, \alpha)$ can be whatever under the only condition

$$\sum_{j=1}^{\alpha} h^r_{n,j} = 1$$

5. — Case of Finite Increment.

When we have a finite increment ΔP, or when we want to calculate also the higher order contribution to the changes in eigenvalues and eigensolutions but avoiding the resolution of (18) as a non linear problem, we can operate according to the following scheme, that is valid in the particular case of $c_{n,i;n,j} = 0$ $(i \neq j)$ [see (21) and (22)].

1) to calculate values of first approximation $(\Delta\lambda_n)'$ according to the first order procedure;

2) to calculate $(h^r_{n,k})'$ according to the first order procedure;

3) to calculate $(d^r_{p,q;n})'$ according to the first order procedure;

4) to use the previous results to introducè into equation (18) correction terms corresponding to all the rectangular terms calculated with the

obtained value of first approximation and consider eq.s (18) as a system in the second approximation value $(\Delta\lambda_n)''$, $(h^r_{n,k})''$ and $(d^r_{p,q;n})''$ and so on.

The convergence of the proposed procedure is here assumed and not demonstrated. In the case of a particularly simple vector space model (see Appendix A), such a convergence is verified. It is worth noting that a procedure which avoids the resolution of the non linear eq.s (18) is incapable of getting out the eigenvalues at ΔP when they are complex (7), i.e. when ΔP us large enough to change some eigenvalues from real into complex ones. On the other hand, the resolution of eq.s (18) as non linear ones allows us to take into account also the eventual passage of the eigenvalue to the complex field, due to the change ΔP. This circumstance is illustrated at an elementary model level with reference to a simple vector space operator (see Appendix A) .

6. — The Case of Simple Eigenvalues.

Let us consider now in particular the case in which the eigenvalues are simple. We have

$$PL(W^P_n) = Pa^P_n BW^P_n + \Psi^P_n \tag{3'}$$

$$\mathfrak{L}(W^P_n) = b^P_n BW^P_n - \Psi^P_n \tag{4'}$$

$$Pa^P_n + b^P_n = -\lambda^P_n \tag{5'}$$

$$\Psi^P_m = \sum c^P_{m,n} W^P_n \quad (c_{n,n} = 0) \tag{8'}$$

$$c_{m,n} = c_{n,m} \tag{9'}$$

$$W^{P+\Delta P}_n = h_n W^P_n + \hat{W}^P_n \tag{10'}$$

$$\hat{W}^P_n = \sum_p d_{p,n} W^P_n \quad (p \neq n) \tag{12'}$$

$$\int_V (h_n W^P_n + \hat{W}^P_n) B (h_m W^P_m + \hat{W}^P_m) dV = 0 \quad (n \neq m) \tag{13'}$$

$$\frac{d_{m,n}}{h_n} = -\frac{d_{n,m}}{h_m} \tag{15'}$$

$$d_{p,n}(\lambda_n - \lambda_p) = e_{n,p} \tag{18'}$$

---

(7) When the operator L is not self-adjoint, as in the proposed model of Appendix A.

where

$$e_{p,n} - e_{n,p} = \begin{cases} - \Delta P h_n a_n^P - \Delta \lambda_n h_n - \dfrac{\Delta P}{P} \sum_t d_{t,n} c_{p,t}^P & (n = p) \\ - \dfrac{\Delta P}{P} c_{n,p}^P h_n - \Delta \lambda_n d_{p,n} - \Delta P \{ d_{p,n} a_p^P \sum_t d_{t,n} c_{p,t}^P \} & (n \neq p) \end{cases}$$

From (18′), at $n \neq p$ and when dP tends to zero, taking into account only the principal terms, we obtain

$$- \frac{dP}{P} c_{n,p}^P = \frac{d_{p,n}}{h_n} (\lambda_n - \lambda_p) , \qquad (24)$$

equation which is in keeping with (15′), which states that $\frac{d_{m,n}}{h_n}$ is anti-symmetric as regards m and n, and with (9′), which states that $c_{m,n}$ is symmetric as regards the same indexes.

From (18′) we can also obtain that at $n = p$ we have $e_{n,n} = 0$. Therefore

$$d\lambda_n = - dP a_n^P \qquad (25)$$

and, owing to (5′), we have also

$$\frac{d\lambda_n}{dP} = - a_n^P - P \frac{da_n^P}{dP} - \frac{db_n^P}{dP}$$

or, keeping into account (25)

$$P \frac{da_n^P}{dP} = - \frac{db_n^P}{dP}$$

From (25) we can obtain $d\lambda_n$ and from (18′) we obtain $\frac{d_{p,n}}{h_n}$. The coefficient h_n can be determined normalizing W_n^{P+dP}.

Under the condition that $\Delta \lambda_n$ is real and that the λ^P's are real, as it is true in the case of an hermitian compact operator $f \rightarrow Bw$, the ratios $\frac{d_{p,n}}{h_n}$ are real. This can be proved considering the $(n = p)$ eq.s (18′) as a linear system when the unknown are the $\frac{d_{p,n}}{h_n}$. From the reality of ΔP, P, $c_{n,p}^P$, λ_n, λ_p, $\Delta \lambda_n$, a_n^P, $c_{p,t}^P$ it follows the reality of the $\frac{d_{p,n}}{h_n}$.

Because of the fact that the h_n are real, we can conclude that, under the condition that the operator $f \longrightarrow Bw$ is hermitian and compact independently from P and λ (both real), the eigenfunctions $W^{P+\Delta P}$'s are real coefficient linear combinations of the W^P's.

Let us now demonstrate i) that keeping into account a limited set of eigensolutions at the value P $(1 \leq n \leq \bar{n})$ and disregarding eigensolutions from the $(\bar{n} + 1)$ the up to ∞, the eigenvalues calculated at $P + \Delta P$ are greater than the correct ones and ii) that each further eigensolution taken into account induces a reduction in this eigenvalue. It is sufficient to demonstrate the statement ii) of course.

From (18′), with $n = p$ we have

$$\Delta \lambda_n = - \Delta P a_n^P - \frac{\Delta P}{P} \frac{1}{h_n} \sum_t d_{t,n} c_{n,t}^P . \tag{26}$$

Recalling now (24), eq. (26) can be written:

$$\Delta \lambda_n = - \Delta P a_n^P + \frac{1}{h_n^2} \sum_t (d_{t,n})^2 (\lambda_n - \lambda_t) \tag{27}$$

If $1 \leq n \leq \bar{n}$ and $1 \leq t \leq n + 1$ the term

$$\frac{1}{h_n^2} d_{\bar{n}+1,n}^2 (\lambda_n - \lambda_{\bar{n}+1})$$

is negative and represent a reduction of the eigenvalue at $P + dP$. It is useful to note that such a result is independent from the sign of ΔP and that it is a consequence of the reality of the $\frac{d_{t,n}}{h_n}$, beside other conditions.

7. — Application.

As an application, the equations previously stated, were used to determine by means of finite differences indifferent equilibrium forms and buckling critical stresses of a rectangular flat panel with simply supported edges and subjected to pure shear. This determination was performed starting from the knowledge of natural modes and frequencies of the plate itself, without shear stresses.

The application itself and its results are described in the following sections.

7.1 — Equilibrium equation.

The equilibrium differential equation of a flat panel subjected to pure shear stresses and inertia forces, when we consider only the displacement w, normal to the panel itself is

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left\{2\,N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} \qquad \begin{matrix}(0 \leq x \leq a)\\(0 \leq y \leq b)\end{matrix}$$

where

$$D = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)} \qquad \text{(flexural stiffness)}$$

$$\varrho = \frac{s\gamma}{g} \qquad \text{(mass density per unit area)}$$

Let us put now

$$w = W(x, y)e^{\omega t} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

We have

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left\{2N_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \varrho\omega^2 W\right\}$$

If we introduce the following substitutions

$$P = -2N_{xy}\ ; \quad \lambda = -\omega^2\ ; \quad B = \frac{\varrho}{D}$$

$$L(W) = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$\mathfrak{L}(W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$$

we can reduce the previous equation to the proposed form

$$\mathfrak{L}(W) + PL(W) + \lambda BW = 0 \qquad \text{(1 repeated)}$$

In the case of simply supported edges, the boundary conditions are

$$(W)_{\substack{x=0,a\\y=0,b}} = 0\ ; \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{x=0,a} = 0\ ; \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{y=0,b} = 0 \qquad (2')$$

and natural modes and respective frequencies are (when shear stress is zero)

$$w^0_{m,n} = \sin \pi m X \sin \pi n Y$$

$$\lambda^0_{m,n} = -\frac{1}{B}\left[\frac{r^4 m^4}{a^4} + 2\,\frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{b^4}\right] \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \tag{28}$$

where

$$X = \frac{x}{a}\,; \qquad Y = \frac{y}{b}\,.$$

7.2 — Calculus procedure.

With the following substitutions

$$L_{m,n} = Bab\lambda_{m,n}$$

$$\Omega_{m,n} = w_{m,n}$$

$$A_{m,n} = \int_A \Omega^2 dXdY$$

$$\Delta F = ab\Delta P$$

$$B_{m,n} = \Delta F \int_A L(\Omega)\Omega dXdY$$

the determination of the eigenvalue in λ and of the respective eigenfunctions, corresponding to values of P obtained by increments ΔP of finite amount, is performed through the procedure which follows.

a) Starting data

$$L^0_{m,n} = -\left[\frac{\pi^4 m^4}{(a/b)^4} + 2m^2 n^2 \pi^2 + \frac{\pi^4 n^4}{(a/b)^2}\right]$$

$$\Omega^0_{m,n} = \sin \pi m X \sin \pi n Y$$

b) First step (8)

$$B^0_{m,n} = 0$$

$$L^1_{m,n} = L^0_{m,n} + \frac{B^0_{m,n}}{1/4} = L^0_{m,n}$$

(8) If a ΔP was chosen, $L^1_{m,n}$ means $L_{m,n}(\Delta P)$ and $L^i_{m,n}$ means $L_{m,n}$ at $P = i\Delta P$.

$$D^0_{m,n;p,q} = \begin{cases} 0 & \text{(if } m \pm p \text{ or } n \pm q \text{ are even)} \\ \dfrac{4mnpq}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} & \text{(if } m \pm p \text{ and } n \pm q \text{ are odd)} \end{cases}$$

$$E^0_{m,n;p,q} = \frac{\Delta F}{L^0_{p,q} - L^0_{m,n}} = 0\ ; \quad \Delta^0_{m,n;p,q} = 0$$

$$\Omega^1_{m,n} = \Omega^0_{m,n} + \sum_{p,q} \Delta^0_{m,n;p,q}\, \Omega^0_{p,q}$$

$$\Omega^1_{m,n} = \delta'_{ij}\Omega_{ij} \qquad (i \text{ and } j \text{ entire number})$$

c) -th step (9)

$$A^{l-1}_{m,n} = \frac{1}{4} \sum_{ij} (\delta^{l-1}_{m,n;\,i,j})^2$$

$$B^{l-1}_{m,n} = \Delta F \sum_{ij} \left[\sum_{rs} (\delta^{l-1}_{m,n;\,i,j})(\delta^{l-1}{}_{;\,r,s}) D^0_{i,j;rs}\right]$$

$$L^{l**}_{m,n} = L^{l-1}_{m,n} + \frac{B^{l-1}_{m,n}}{A^{l-1}_{m,n}} - \frac{1}{A^{l-1}_{m,n}} \sum_{t,r} \Delta^*_{m,n;\,t,r}\, D^{l-1}_{m,n;t,r}$$

$$D^{l-1}_{m,n} = \sum_{ij} \sum_{rs} \delta^{l-1}_{m,n;\,i,j}\, \delta^{\,l-1}_{p,q;rs}\, D^0_{i,j;\,r,s}$$

$$E^{l-1}_{m,n;p,q} = \frac{\Delta F}{L^{l-1}_{p,q} - L^{l-1}_{m,n}}$$

$$\Delta^{l-1**}_{m,n;p,q} = \frac{D^{l-1}_{m,n;p,q}\, E^{l-1}_{m,n;p,q}}{A^{l-1}_{p,q}} - \frac{1}{L^{l-1}_{p,q} - L^{l-1}_{m,n}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[B^{l-1}_{m,n} + (L^{l*}_{m,n} - L^{l-1}_{m,n})\right] \Delta^*_{p,q;m,n} + \sum_{t,r} \Delta^*_{m,n;\,t,r}\, D^{l-1}_{p,q;\,t,r} \right\}$$

$$\Omega^l_{m,n} = \Omega^{l-1}_{m,n} + \sum_{p,q} \Delta^{\,l-1}_{m,n;\,p,q}\, \Omega^{l-1}_{p,q}$$

$$= \sum_{ij} \delta^l_{m,n;\,i,j} \Omega^0_{i,j}$$

7.3 — Data for Comparison of Results.

The initial buckling critical value of the shear stress, when = 0, can be calculated by means of the formula

$$\tau^0_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 s} \qquad \left[K = K\left(\frac{a}{b}\right); \quad K(2) = 6{,}45\right]$$

(9) The starred values are those obtained in the previous iteration. The double starred values are those obtained in the actual iteration. Iteration can be stopped when two of them have a difference smaller than a fixed value.

Therefore we have

$$| F_{cr} | = + 4\pi^2 K = + 4\pi^2 \,.\, 6{,}45 = + 253$$

The calculations (10) performed on the basis of the previous formulas in the case of $m = 10$, $n = 5$ and $\Delta F = 25$ gone the value of $L_{2,1}$, that is the reduced square frequencies that crosses the F axis at the lower value of F, reported in fig. 1. Such lower value indicates that the elastic

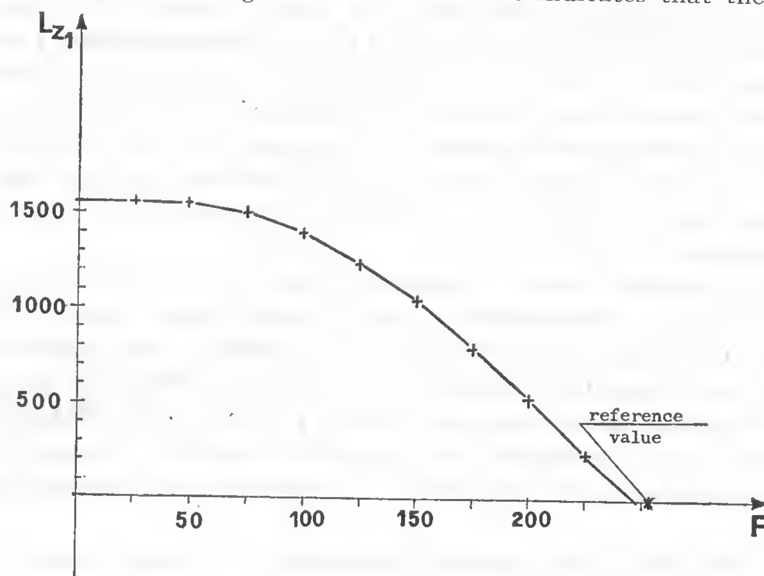


Fig. 1.

stability limit for a flat panel subjected to pure shear is at $F = 244$ with a critical shape which denotes two half waves along x and half wave along y. As regards the critical value of F it must be compared with the theoretical value (253).

As regards the critical shape it is in very good agreement with known experimental results.

APPENDIX A

Simple vector-space model.

In order to have a simple vector space model to illustrate at an intuitive level several concepts discussed in this paper and also to open

---

(10) Acknowledgments. The A. is very grateful to Dr. Anna Tomasetti and Ing. Sergio Caria of the " Centro di Calcolo " of the " Politecnico di Torino " who provided the calculus program and performed the calculations.

the talk on the non hermitian operators, let us consider the real coefficient matricial eigen value problem

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta + \Delta\beta \\ \beta - \Delta\beta & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w \end{vmatrix} = - \lambda \begin{vmatrix} w \end{vmatrix} \tag{A1}$$

where the coefficient square matrix at the left hand side is obviously composed of a symmetric matrix and an antisymmetric matrix and the unknown column w contains two elements. The antisymmetric matrix is to be intended as a finite change of the symmetric one, in order to observe the effect of changes of $\Delta\beta$ from zero to positive values. The symmetric matrix is definite positive if $\alpha > |\beta| > 0$. We shall suppose that such two conditions are satisfied, so considering a problem having real positive eigenvalues at $\Delta\beta = 0$.

The proposed model constitutes a finite (two) dimension operator which trasforms two dimension vectors w into vectors having the same domain. Therefore it is unable to give an insight into the approximation offered by a truncated expansion. It was chosen because of the known properties of the finite dimension operators of having eigenvalues also in the case of non symmetric (non hermitian) matrices. In particular the perturbation due to $\Delta\beta$ was chosen of a non symmetric type to illustrate that:

— the perturbation approach described in this paper, when the final equations are resolved as non linear ones, in the case of this model is valid also if the perturbation transforms the real eigenvalues into complex ones;

— the same approach, when the equations are resolved in a linearized way, is valid only up to the critical value $\Delta\beta = \beta$, which discriminates between real and complex eigenvalues (see fig. A1).

The eigensolution of (A1) are the following:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - \alpha + \sqrt{\beta^2 - (\Delta\beta)^2}, \qquad w_1 \cong \begin{vmatrix} -\sqrt{\beta + \Delta\beta} \\ \sqrt{\beta - \Delta\beta} \end{vmatrix} \\ \lambda_2 &= - \alpha - \sqrt{\beta^2 - (\Delta\beta)^2}, \qquad w_2 \cong \begin{vmatrix} \sqrt{\beta + \Delta\beta} \\ \sqrt{\beta - \Delta\beta} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{A2}$$

The eigenvalues λ_1 and λ_2 (and also the corresponding eigenvectors) are real if $|\Delta\beta| < |\beta|$. The two eigenvectors are orthogonal between them, in particular at $\Delta\beta = 0$, and it is possible to put the following positions:

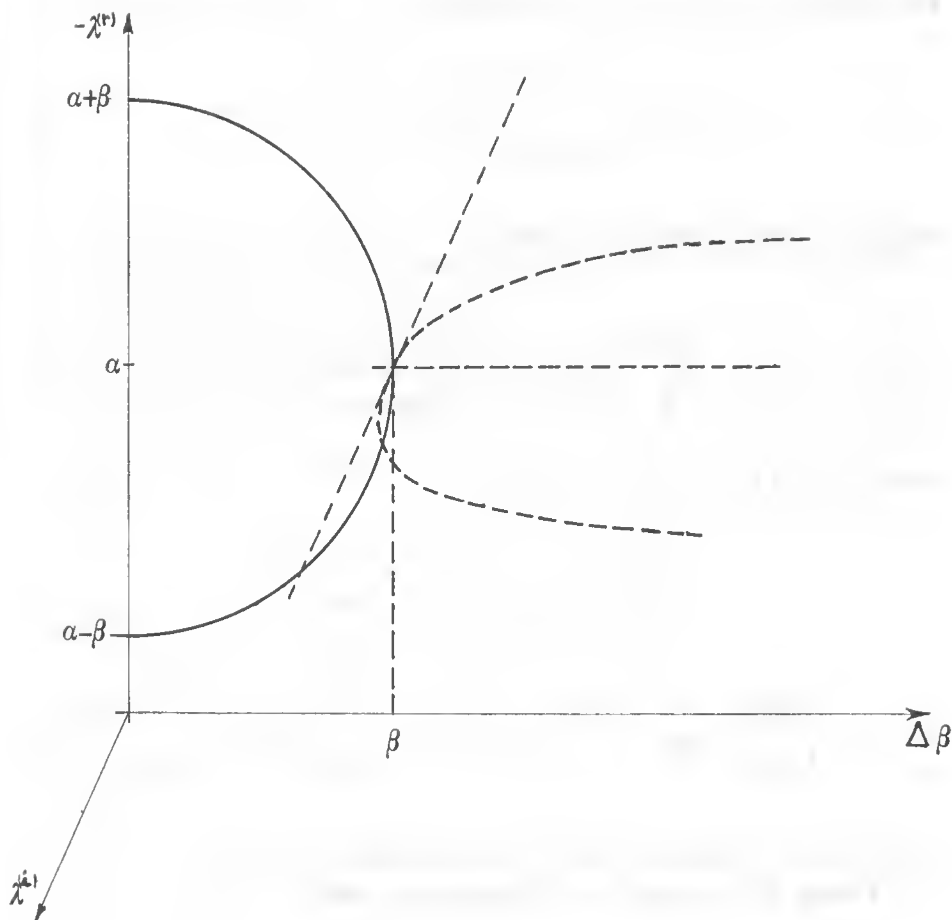


Fig. A1.

$$\lambda_1(\beta + \Delta\beta) = \lambda_1(\beta) + \Delta\lambda_1, \quad w_1(\beta + \Delta\beta) = h_1\, w_1(\beta) + d_{2,1}\, w_2(\beta)$$
$$\lambda_2(\beta + \Delta\beta) = \lambda_2(\beta) + \Delta\lambda_2, \quad w_2(\beta + \Delta\beta) = h_2 w_2(\beta) + d_{1,2} w_1(\beta) \tag{A3}$$

The scalar quantities $\Delta\lambda_1$, and $\Delta\lambda_2$ are the changes of λ_1, and λ_2 respectively, due to the change $\Delta\beta$. The scalar quantities h_1, h_2, $d_{1,2}$ and $d_{2,1}$ give the eigenvector $w_1(\beta + \Delta\beta)$ and $w_2(\beta + \Delta\beta)$ as linear combinations of $w_1(\beta)$ and $w_2(\beta)$ or vectors proportional to them. If we put:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \lambda_{1,2} + \Delta\lambda_{1,2}; \quad \bar{w}_1 = h_1 w_1 + d_{2,1} w_2\,; \quad \bar{w}_2 = h_2 w_2 + d_{1,2} w_1$$

the following equations must be realized:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \bar{w} + \begin{vmatrix} 0 & \Delta\beta \\ -\Delta\beta & 0 \end{vmatrix} \bar{w} + \begin{vmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{vmatrix} \bar{w} = 0\,, \tag{A4}$$

and also the two following equations:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} w_{1,2} + \begin{vmatrix} \lambda_{1,2} & 0 \\ 0 & \lambda_{1,2} \end{vmatrix} w_{1,2} = 0 \tag{A5}$$

From eq.s (A5) and (A4) we obtain:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} d_{2,1} w_2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{vmatrix} w_2 =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & \Delta\beta \\ -\Delta\beta & 0 \end{vmatrix} d_{2,1} w_2 - \begin{vmatrix} \Delta\lambda_1 & 0 \\ 0 & \Delta\lambda_1 \end{vmatrix} h_1 w_1 - \begin{vmatrix} \Delta\lambda_1 & 0 \\ 0 & \Delta\lambda_1 \end{vmatrix} d_{2,1} w_2 - \begin{vmatrix} 0 & \Delta\beta \\ -\Delta\beta & 0 \end{vmatrix} h_1 w_1$$

beside another equation having inverted indices 1 and 2.

Taking into account eq.s (A5), the fact that

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} w_1 = w_2, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} w_2 = - w_1,$$

and the orthogonality between w_1 and w_2, these equations generate each two separate equations:

$$\begin{cases} \Delta_{2,1}(\lambda_1 - \lambda_2) = \Delta\lambda_1 d_{2,1} - \Delta\beta h_1 \\ \Delta\beta d_{2,1} - \Delta\lambda_1 h_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{1,2}(\lambda_2 - \lambda_1) = - \Delta\lambda_2 d_{1,2} + \Delta\beta h_2 \\ \Delta\beta d_{1,2} + \Delta\lambda_2 h_2 = 0 \end{cases} \tag{A6}$$

In particular the resolution of (A6) gives:

$$\Delta\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - (\Delta\beta)^2}$$
$$\Delta\lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - (\Delta\beta)^2} \qquad \text{(A7)}$$

The expressions (A7) are in agreement with (A2). Eq.s (A4) can be utilized also in a step by step approximated procedure which at each step requires only the resolution of linear equations.

The solutions having the square roots affected by the apposite signs are to be disregarded, because they don't tend to zero as $\Delta\beta \rightarrow 0$. They are introduced because of the analytical procedure. In fact, let us consider the following approximated step by step solution for $\Delta\lambda_1$ and $\dfrac{d_{2,1}}{h_1}$.

1st step:

$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{I}} = 0\,; \qquad (d_{2,1})^{\mathrm{I}} = -\Delta\beta\,\frac{h_1}{2\beta}$$

2nd step:

$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{II}} = -\frac{(\Delta\beta)^2}{2\beta}\,; \qquad (d_{2,1})^{\mathrm{II}} = -\Delta\beta h_1\,\frac{1}{2\beta - \dfrac{(\Delta\beta)^2}{2\beta}}$$

3rd step:

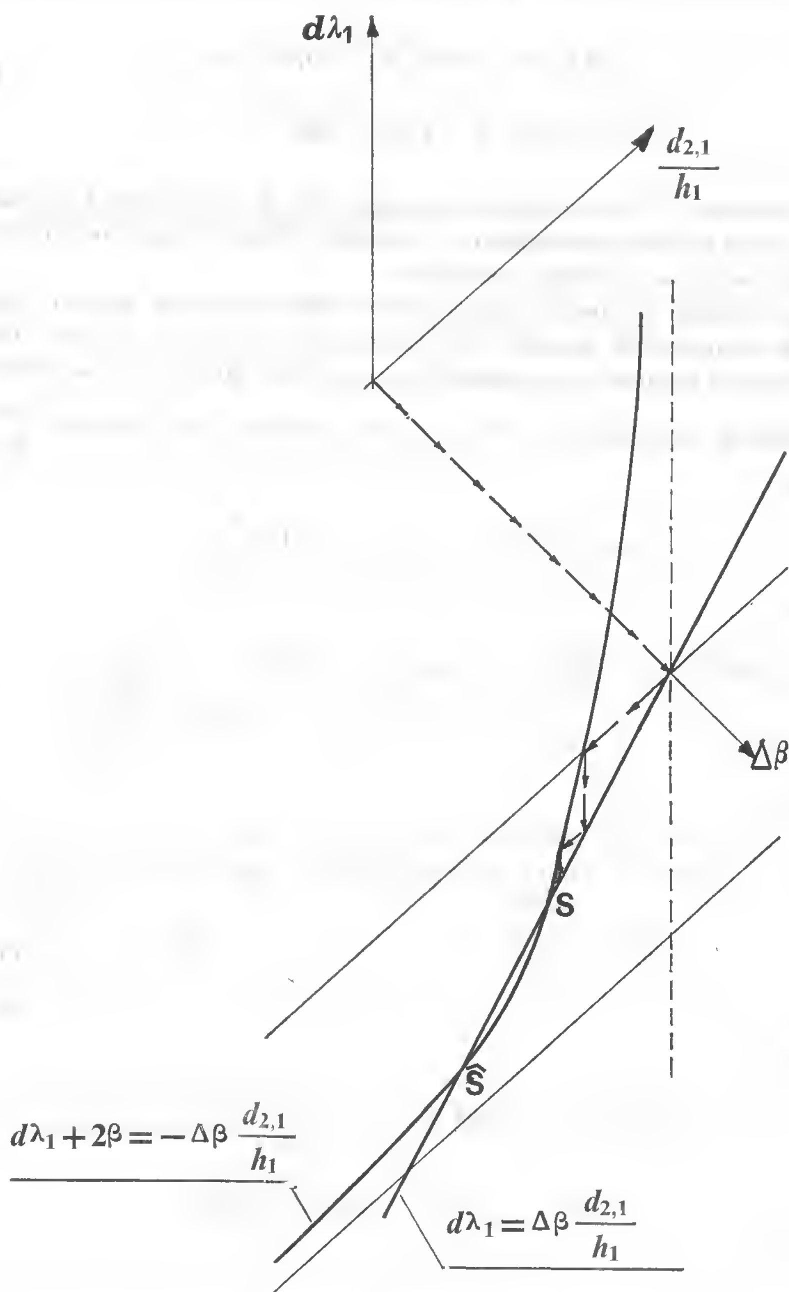
$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{III}} = -(\Delta\beta)^2\,\frac{1}{2\beta - \dfrac{(\Delta\beta)^2}{2\beta}}\,; \qquad (d_{2,1})^{\mathrm{III}} = -\Delta\beta h_1\,\frac{1}{2\beta - \dfrac{(\Delta\beta)^2}{2\beta - \dfrac{(\Delta\beta)^2}{2\beta}}}$$

4th step:

$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{IV}} = -(\Delta\beta)^2\,\frac{1}{2\beta - \dfrac{(\Delta\beta)^2}{2\beta - (\Delta\beta)^2/2\beta}}$$

and so on.

In a graphical representation (see fig. A3) such a procedure corresponds to the arrowed line, which converges towards the intersection S (between the straight line and the hyperbole) that represents the exact solution.



$d\lambda_1$
$\frac{d_{2,1}}{h_1}$
$\Delta\beta$
S
Ŝ
$d\lambda_1 + 2\beta = -\Delta\beta\,\frac{d_{2,1}}{h_1}$
$d\lambda_1 = \Delta\beta\,\frac{d_{2,1}}{h_1}$

Fig. A3.

BIBLIOGRAPHY

[1] R. Courant, P. Hilbert, *Methods of mathematical physic, Interscience Publishers,* Inc., New York, vol. I, Cap. V, paragr. 13.

[2] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods,* John Wiley and Sons, Cap. 3, paragr. 1.6 and 1.7.

[3] G. Fichera, *Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori,* Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », Roma (1968).

[4] G. Fichera, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems* - Springer-Verlag (1965).

[5] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book* - Divan Norstrand Company, Inc. Princeton.

P. CICALA (*)

Shell Research in the Politecnico di Torino.

Riassunto. — *In connessione con le ricerche sulla elastodinamica della struttura a guscio svolte nell'Istituto di Scienza delle Costruzioni del Politecnico di Torino, si prospettano le formulazioni relative alle vibrazioni assialsimmetriche del guscio di rivoluzione.*

1. — Recent advances in discretized methods of stress analysis need not be emphasized here. General purpose programs in increasing number are available to the practical stress analyst and claim capability of solving linear elastic and dynamic problems for any assigned structure. However, concerning shell calculations, it should be remarked that the discretization methods lead to large systems of equations whose implementation and resolution require great expertise and large expenditures. Even if these means can be afforded for the final phase of a project whose size justifies the expenditures, a clear insight into the behaviour of the structure is extremely useful. The opinion that the asymptotic approach to shell analysis is capable of furnishing such information, as " ready to use " formulas or graphs or simple calculation procedures, has been the leading motive in the studies of a research group in the Politecnico di Torino. Also discretization methods have been used, but with a limited scope: especially devised as auxiliary means to solve the systems as simplified by asymptotic considerations they were matched with parallel analytic calculations.

These investigations have been summarized in an earlier paper [1] for the Madrid Colloquium of the I.A.S.S. and, more recently, in a short communication [2] presented at the Euromech Colloquium held in Warsaw. Omitting mention of investigations described in these summaries, the present communication connects with the papers [3], [4] on shell elastodynamics.

2. — In note [3] various formulations concerning free vibrations of an indefinite circular cylindrical shell have been developed, extending the

(*) Politecnico di Torino.

parametric expansions to second order terms in order to explore the fields of maximal accuracy of the formulations, with the aid of the results of the exact solution tabulated in [5].

In [4] the general concepts for the asymptotic approach to shell elastodynamics were presented with the aid of a geometric representation and with examples concerning cylindrical shells.

The considerations developed here are based on these same concepts with special reference to axisymmetric situations. Suggestion to this study came from an interesting paper by Antona [6] concerning free axisymmetric vibration of an indefinite circular cylindrical shell. Antona followed both the asymptotic and the axiomatic method, and achieved better results by the second approach. The present study aims at showing that a general inspection of the problem as allowed by the representation suggested in [3] leads to equally good quantitative results and to a more complete sight of the vibration aspects.

3. — Let $\delta = h/R$ be the thickness parameter, where h is a representative value of thickness and R a reference length; let ξ_1, ξ_2 be gaussian coordinates on the midsurface of the shell and $\partial_1 = \partial/\partial\xi_1$, $\partial_2 = \partial/\partial\xi_2$. The material is homogeneous, with density ϱ, isotropic and elastic with modulus E and Poisson's ratio ν. Let $\tilde{\omega} = R^2\varrho\omega^2(1 - \nu^2)/E$, where ω is the circular frequency.

Threedimensional analysis of shells, when reduced to a general two-dimensional formulation [7] without a priori assumptions, leads to an infinite system. Restricting to higher order derivatives, we may write the resultant equation for free vibrations in the form

$$\Sigma k h^n \omega^c \partial_1^a \partial_2^b V = 0 \tag{1}$$

where k are factors independent of δ and V is one of the unknowns: the exponents n take even values from zero on while a, b, c may take also odd values.

Prior to explicit evaluation of the factors k, in a space S_4 with cartesian coordinates a, b, c, n we trace a representative point corresponding to each term in the summation. Fig. 1 gives a perspective view of the sections $n = 0, 2, 4$, indicating representative points on the outer contours. For $n \geq 2$ we obtain the tetrahedra $OA_nB_nC_n$ with $\overline{OA}_n = \overline{OB}_n = 2\overline{OC}_n = 6 + n$; for $n = 0$ we find the pentahedron $OA_0D_0C_0E_0B_0$.

4. — For $\delta \to 0$ we introduce the order of magnitude relations

$$\partial_1 \approx \delta^{-\alpha}, \quad \partial_2 \approx \delta^{-\beta}, \quad \tilde{\omega} \approx \delta^{-\gamma} \tag{2}$$

Relative orders of magnitude of terms in (1) are given by δ^μ with

$$\mu = n - \alpha a - \beta b - \gamma c \tag{3}$$

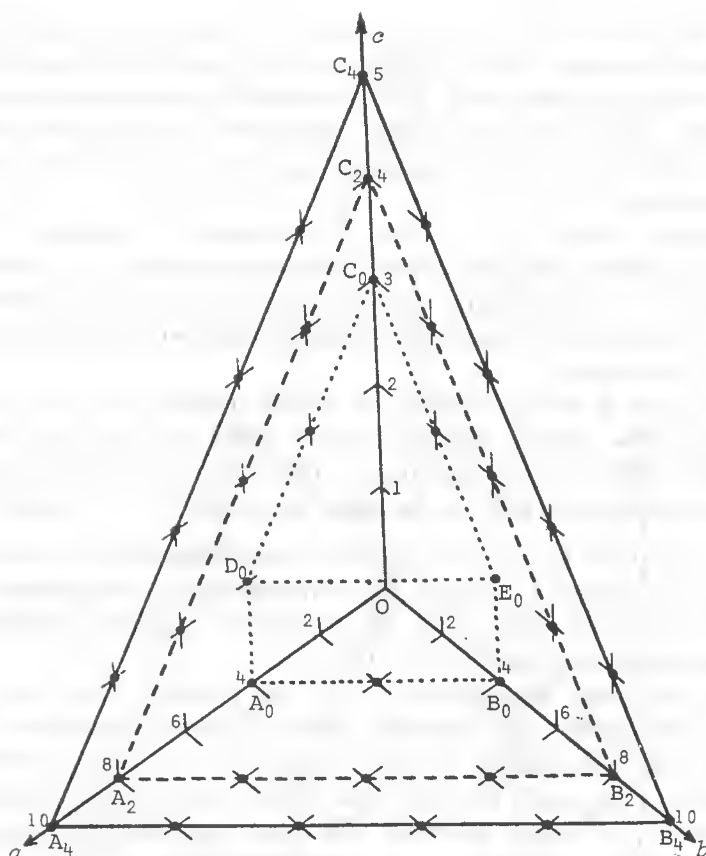


Fig. 1.

If the hyperplane $\mu = \mu_0$ contains certain representative points, whilst for all other points is $\mu > \mu_0$, it will be termed tangent; " contact points " are those for which $\mu = \mu_0$. Terms corresponding to these points are the fundamental ones in the resultant equation for the related twodimensional " theory ": each of these formulations corresponds to a " facet " of the fourdimensional polyhedron.

Contact points may form a three- or twodimensional figure or even reduce to a segment or a point. Cases of threedimensional contact are:

I) For $\alpha = \beta = \gamma = 0$, and correspondingly $\mu_0 = 0$, we obtain the dotted pentahedron of fig. 1. The related fourth order differential system concerns membrane and inextensional states.

II) For $\alpha = \beta = 1/2$, $\gamma = 0$, and correspondingly $\mu_0 = -2$, the contact points for $n = 0$ belong to the rectangle $A_0B_0D_0E_0$ and for $n = 2$ to the edge A_2B_2. The corresponding " rapid variation " states are governed by en eighth order differential system.

III) For $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$ ($\mu_0 = -6$) the contact points lie on the frontal triangles $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$ and so on. In this case, as for all modes of very high frequency ($\gamma = 2$) we get an infinite number of contact points. For these " thickness modes " reduction to twodimensional theory fails: the third coordinate measured along the normal to the shell is to be reintroduced (1).

Once the values α, $\beta < 1$, $\gamma < 2$ are assigned, deduction of the corresponding system from the general equations reduces to a routine labor. As shown in [7] for the static case, the system is obtained in cascade form allowing calculation of successive terms in parametric expansions for the unknown functions.

Of course, a limited number of choices for the triad α, β, γ is to be considered. The related theories have a wider field of application with acceptable relative errors, the larger is the number of contact points: more restricted application field is the price for simplicity of formulation.

5. — Criteria for the said choice are best illustrated in a subspace S_3. Consider the section $b = 0$ (fig. 2), corresponding to axisymmetric situations in revolution shells, with the coordinate ξ_2 taken to represent the longitude angle, for which $\partial_2 = 0$.

For the lowest frequencies ($\gamma = 0$), the contact planes must be parallel to the c-axis (say, vertical). One of these contains the trapeze $OA_0D_0C_0$ and corresponds to wavelengths of the order of the general dimensions of the shell. For a circular cylinder of radius R, measuring the coordinate ξ_1 in axial direction, the first approximation form of the resultant equation splits into the following equations (2)

$$R^2(1 - \nu)\partial_1^2 + 2\tilde{\omega} = 0, \quad R^2(1 - \nu^2 - \tilde{\omega})\partial_1^2 + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (4), (5)$$

Eq. (5) corresponds to displacements in the meridian plane and is affected by relative errors $\approx \delta^2$. Eq. (4) refers to a torsional mode and is not affected by error. In the static case these equations yield the well known polynomial solutions for membrane stresses and displacements in short cylindrical shells.

Another vertical contact plane contains A_0, D_0, A_2 and corresponds to $\alpha = 1/2$, that is, to a length of variation $\approx \sqrt{Rh}$. This a subspecies of rapid variation solutions: the theory for the static case originated from the analysis of edge effects. For the cylindrical shell, with $h_2 = h^2/12$, the resultant equation may be written

$$R^2h_2\partial_1^4 + 1 - \nu^2 - \tilde{\omega} = 0 \qquad (6)$$

(1) In fig. 1 of [4] the points $a = b = 0$, $c = 3 + n/2$ are missing because the case $\gamma = 2$ has been ruled out in the deduction process of (1).

(2) Variables V to which the operators apply need not be specified.

Fig. 2.

Combination of the solutions of (4), (5) and (6) allows 4 conditions to be prescribed on each contour parallel. For instance, for stress boundary conditions, the 4 Kirchhoff stress resultants can be assigned. On the contrary, if the variation of stresses within the edge thickness is prescribed, another class of solutions, the " boundary layer states ", with $\alpha = 1$, are to be introduced. These correspond to the vertical plane through A_2 and A_4. The required threedimensional analysis is also simplified by the conclusions emerging from fig. 2: first approximation equations are those of the static problem for plates ([7], § 9.3, § 9.4).

The frequency parameter $\tilde{\omega}$ appearing in eqs. (4), (5), (6) and consequently in the boundary value problem, is determined as an eigenvalue.

The theory indicated becomes invalid for higher harmonics. If modes corresponding to $\gamma = 2$ are to be considered, tangent planes parallel to

the line C_0C_4 are to be traced. Moreover, to satisfy at least 4 boundary conditions per edge parallel, they must contain point A_2. Therefore we have one tangent plane, containing D_0C_0, A_2C_2, A_4C_4 and so on: asymptotic considerations do not split the threedimensional analysis into simpler problems.

While in the case $\gamma = 0$ the first two tangent planes intersect along the vertical $D_0\gamma_0$, in the case $\gamma = 2$ the director line is $D_0\gamma_2$ parallel to C_0C_4. An intermediate case can be considered tracing the line $D_0\gamma_1$ with $a = 4$, $n = c - 1$. Contact is limited to A_2D_0 and D_0C_0. The first plane represents edge effects with a short length of variation ($\alpha = 3/4$): for the cylindrical shell it yields

$$R^2h_2\partial_1^4 - \tilde{\omega} = 0 \tag{7}$$

replacing eq. (6). The second contact furnishes a rather short wavelength ($\alpha = 1/2$) for the shell interior: in the case of the cylinder we get

$$R^2\partial_1^2 + \tilde{\omega} = 0 \tag{8}$$

replacing eq. (5). Eq. (4) holds unchanged.

6. — For the indefinite circular cylindrical shell solutions of the form

$$V = f(\zeta) \cos \frac{\lambda\xi_1}{R} \cos \omega t \tag{9}$$

are considered, where ζ is the radial coordinate measured from the midsurface. The wavelength $2\pi/\lambda$ is assigned, with order of magnitude δ^α.

In the subspace $b = 0$ (fig. 3), if $\alpha = 0$, tangent planes containing the direction of the a-axis are traced. One of these is the plane $n = 0$, leading to eqs. (4), (5). These are to be solved for the frequency after substituting $-\partial_1^2 = \lambda^2/R^2$:

$$\tilde{\omega} = \frac{1-\nu}{2}\lambda^2, \qquad \tilde{\omega}^2 - (1+\lambda^2)\tilde{\omega} + (1-\nu^2)\lambda^2 = 0 \qquad (10),\ (11)$$

Hence the three lowest frequencies are obtained. Higher frequencies correspond to the plane containing C_0 and C_4 ($\alpha = 0$, $\gamma = 2$). Threedimensional analysis, in a first approximation step, is simplified by the fact that terms containing ∂_1 are to be neglected. Denoting by u the axial displacement, we get

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = -\frac{2\tilde{\omega}}{1-\nu}\frac{u}{R^2} \tag{12}$$

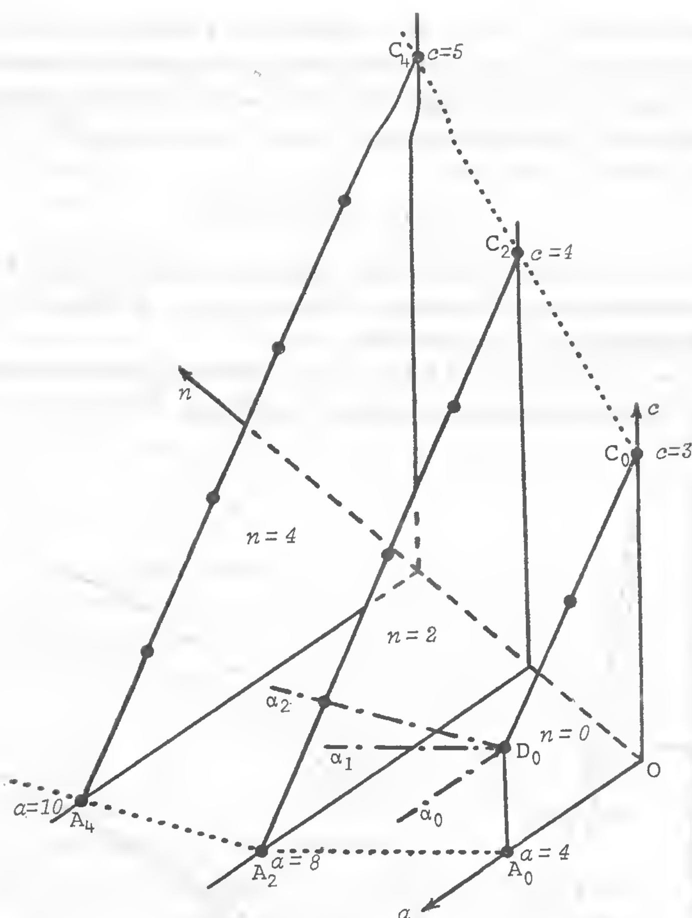


Fig. 3.

Solutions with $\partial u/\partial\zeta = 0$ on both shell faces ($\zeta = \pm h/2$) are given by $f = \sin(m\pi\zeta/h)$ with m integer. Thus, for first approximation, the well known frequencies for shearing modes are obtained

$$\tilde{\omega} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi R}{h}\right)^2 \tag{13}$$

Similar analysis holds for thickness extension modes, yielding

$$\tilde{\omega} = \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\left(\frac{m\pi R}{h}\right)^2 \tag{14}$$

For wavelengths as small as h, that is $\alpha = 1$, the director line rotates from $D_0\alpha_0$ (fig. 3) to $D_0\alpha_2$, parallel to A_2A_4. Here we have one tangent

plane containing D_0C_0, A_2C_2, A_4C_4 and so on. Intricacies of the threedimensional analysis are somewhat diminished by asymptotic considerations.

We introduce the intermediate case $\alpha = 1/2$. With the director line $D_0\alpha_1$ parallel to A_0A_2 one tangent plane contains A_0, D_0, A_2. Hence, according to eq. (6) we get

$$\tilde{\omega} = 1 - \nu^2 + h_2\lambda^4/R^2 \tag{15}$$

implying $\gamma = 0$. On the other side, contacts along D_0C_0 lead to $\gamma = 1$ and to the expressions (10) and $\tilde{\omega} = \lambda^2$ according to (8). Higher frequencies are still furnished by (13) and (14).

For $\nu = 0.3$ and $h = 0.1R$ the results concerning lowest frequency are compared with the exact solution from [5] (fig. 4). The ratios $(\omega - \omega')/\omega$,

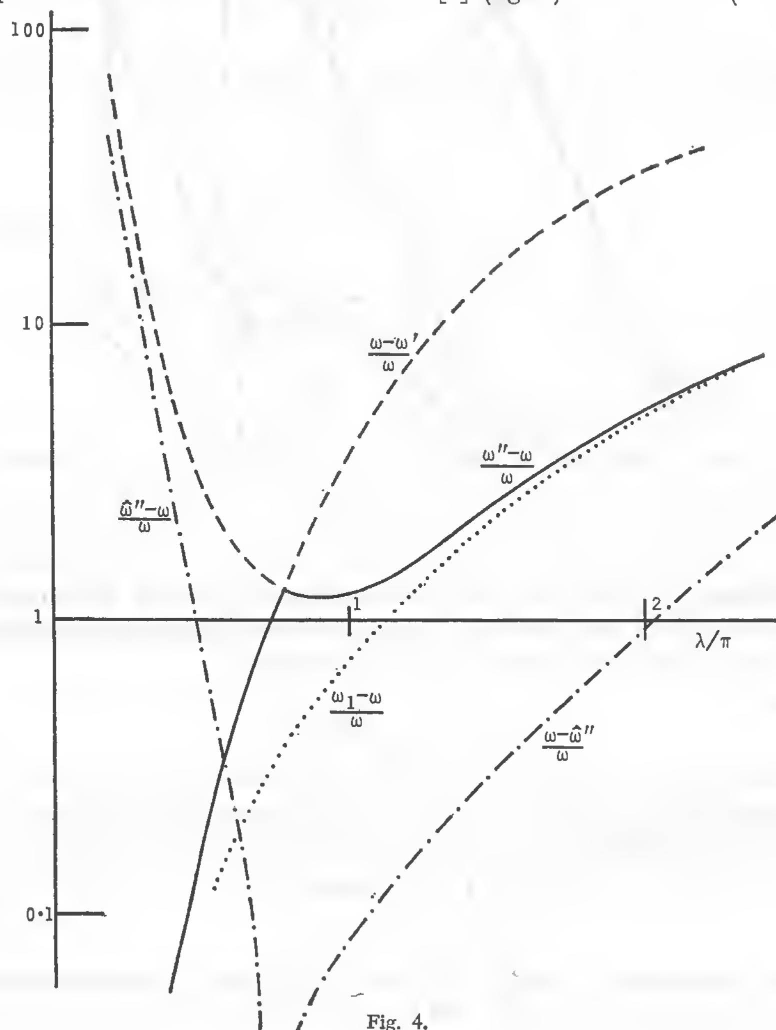


Fig. 4.

$(\omega'' - \omega)/\omega$ are plotted in a logaritmic scale vs. λ, with ω denoting the exact value, ω' the value deduced from the smaller root of (11) and ω'' the frequency obtained from eq. (15). For small wavelengths ($\approx 2R$) the ratio ω''/ω approaches 1 while ω'/ω shows large deviations: for long waves the positions are inverted. For comparison with an axiomatic formulation, we take Flügge's eq. (214) in [8], whose terms are represented by dots on fig. 2. Denoting by ω_1 the smallest root of this third grade equation for the axisymmetric case, we obtain the dotted line on fig. 4. This curve establishes a transition between the lower branches of the previous curves. Errors in eq. (15) as well as in Flügge's equation take relevant importance by increasing values of λ.

For the second mode, discrepancies in frequency ratios are much smaller: even if the second root of eq. (11) is adopted in the whole field covered by fig. 4, relative errors amount to less than 1%. Therefore this representation is omitted.

7. — The example presented on fig. 4 illustrates the characteristic property of the asymptotic approach: it leads to alternate formulations, each giving accurate results in its proper field. This occurrence is marked in the representative space (fig. 3) by the change of the tangent plane. On the contrary, the axiomatic approach furnishes a unitary formulation covering the joined fields. On the other hand, even the most refined axiomatic formulation fails to cover the *whole* variation field of structural parameters: increasing errors are found when entering the region where threedimensional approach is compulsory.

Of course, if the simplifications furnished by the asymptotic approach consisted only in facilitating the resolution of an algebraic equation, the advantage would be outweighed by the merits of a unitary expression: but it is in the more complicated boundary value problems that this approach reveals its full power, splitting the analysis into simpler steps, as shown for the general axisymmetric problem by the diagram on fig. 2. Therefore, the question on the choice of the proper formulation for a given structural problem deserves attention. This point has been investigated in [3] and in other papers referred to in [1] according to concepts outlined in the Appendix. Elaboration of indicative data capable of guiding practical application in the choice of the formulation of "minimal imprecision" is laborious. It is hoped that wider interest in that research can be aroused.

APPENDIX

The procedure of parametric expansions can also yield criteria for the choice of the optimal formulation. As a measure for "imprecision" of a calculation the ratio $|\Delta V|/|V|$ can be taken, where $|V|$ and $|\Delta V|$ are representative absolute values of approximate results and difference of first and second approximation results.

To apply this test to eq. (15) we calculate the second approximation in the expansion of $\tilde{\omega}$ according to eq. (29) of [3] (3).

$$\Delta\tilde{\omega} = -\left[\frac{3.4 - 1.4\nu}{1 - \nu}\tilde{\omega}^2 - (5.8 + 2\nu - 4.8\nu^2)\tilde{\omega} + 2.4(1 - \nu^2)^2\right] / \lambda^2$$

with $\tilde{\omega}$ from (15). Denoting by $\hat{\omega}''$ the frequency deduced from $\tilde{\omega} + \Delta\tilde{\omega}$ we obtain the chain dotted line of fig. 4. The correction reduces the error to less than 1% in a wide interval about the intersection of the alternate solutions: therefore it may be used to determine the crossing when the exact value is not known. When the correction is large, the precision deteriorates. Defining the "imprecision ratio" as $I = (\omega'' - \hat{\omega}'')/\omega''$ we get $I = 6\%$ for $\lambda = 2\pi$ (wavelength $= R$), while for $\lambda = 5\pi$ we get $I = 64\%$: for such wavelengths and $h = 0.1R$, the theory with resultant equation (6) is in error: second approximation terms reveal the error but cannot be relied upon to correct it.

---

(3) This equation contains a misprint: the last summand should multiply the operator ∇^2.

REFERENCES

[1] P. Cicala, *Parametric expansions in linear shell theory*, IASS Bull. No. 52 (1973).
[2] P. Cicala, *Experiences on asymptotic and discretized methods of shell analysis*, Euromech 66 Coll., Warsaw (1975).
[3] F. Algostino, P. Cicala, *Le vibrazioni libere del guscio cilindrico, banco di prova delle teorie bidimensionali delle strutture a guscio*, 1° Congr. AIMETA, Udine (1971).
[4] P. Cicala, *Sulla elastodinamica delle strutture a guscio*, Rend. Acc. Naz. Lincei (1974).
[5] A. E. Armenakas, D. C. Gazis, G. Herrmann, *Free vibrations of circular cylindrical shells*, Pergamon Press (1969).
[6] E. Antona, *Sopra due problemi di propagazione di onde elastiche*, L'Aerot. Mi. Sp. (1975).
[7] P. Cicala, *Systematic approximation approach to linear shell theory*, Levrotto, Torino (1965).
[8] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer, Berlin (1957).

M. COMO (*)

Some developments in the theory of elastic stability.

Summary. — *After having closely examined some difficulties and unsolved problems of the stability theory of the continuous systems, the equilibrium stability of the elastic structures is formulated in a proper functional space. It is therefore possible to prove [5 - 11 - 13 - 14] the validity of the energy criterion for the stability analysis of some important structural models.*

1. — Introduction.

The buckling and the post-buckling theory of elastic structures has received a more definite settlement for discrete systems than for the continuous systems. On the other hand, most of the technical problems deal with the buckling of continuous systems and, consequently, the various results, criteria and methods used in the approaches cannot be arranged easily in the general context of the theory of stability in the Liaupunov sense.

The various difficulties and the problems still open in the elastic stability theory of continuous bodies have been thoroughly examined in a recent article by Knops and Wilkes in the Encyclopedia of Physics [1].

The energy criterion itself, as usually formulated in Structural Mechanics, viz. that a positive definite second variation of the potential energy ensures the stability of the equilibrium configuration, does not have a definite foundation and cannot be clearly proved or justified according to the basic Liaupunov definition of stability [2]. This lack of correlation between the technical procedures and the general theory of stability is due to the topological character of the stability definition and to the related difficulties of applying the classical criteria of stability —that have been formulated for discrete systems—to the continuous bodies.

(*) Fac. of Engineering, Piazz.le Tecchio, University of Naples. (Italy).

The main difficulties are related to the following arguments:

a) the norm dependence of the stability concept for continuous systems obliges to " a priori " choose a suitable norm satisfying some essential physical requirements. Among them the stability of the natural (stress-free) configuration, with respect to the chosen norm, can be considered a basic starting point.

b) The assumption of smoothness (n-times differentiability) of the potential energy functional is generally satisfied for discrete systems; the validity of the energy criterion then easily follows in this case. On the contrary for continuous systems the smoothness (at least 2-times strong differentiability) of the energy functional depends on the chosen norm. Moreover often it is difficult to prove this property with respcct to the norms that satisfy the requirements given in *a*).

An examination of the following instructive example in the line of that given in [1], helps towards a better understanding od this wide outline of problems.

Let us consider an elastic beam and let C_0 be the rectilinear configuration of the unloaded beam. Of course, it seems evident that the unloaded rectilinear configuration of the beam is stable, for instance, with respect to all the flexural perturbed motions $v(z, t)$. Let us suppose, for instance, that the set of all the admissible perturbations is constituted by all the functions, continuous with all its derivates up to order 4 and satisfying the boundary conditions $v = v'' = 0$ at $z = 0$ and $z = l$ for any time $t > 0$. Our natural conjecture that the configuration C_0 is stable could seem to be supported by the fact that the incremental potential energy of the beam, up to the second order,

$$E_2(v) = \frac{1}{2} El \int_0^l v''^2 dz \tag{1.1}$$

is positive for any displacement field not identically zero in the interval [0, 1].

Let us now disturb the natural equilibrium of the unloaded rectilinear configuration of the beam by imparting at time $t = 0$ additional bending displacement v and velocities $\dot{v}$.

In order to analyse the consequent motion of the beam we have to choose a measure of the distance between the generic state of motion of the beam at time t and the initial configuration C_0; for instance let us take the distance

$$d_1(t) = \left(\int_0^l v^2(z, t)dz\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l \dot{v}^2(z, t)dz\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

or

$$d_2(t) = \max_{z \in [0,l]} |v(z,t)| + \max_{z \in [0,l]} |\dot{v}(z,t)| \tag{1.3}$$

Let us study in detail the motions of the beam consequent to the set of disturbances:

$$v(z,0) = C \sin n\pi z \; ; \quad \dot{v}(z,0) = 0 \, , \qquad \begin{matrix} z \in [0,l] \\ n \in N \end{matrix} \tag{1.4}$$

and let us analyze the motions of the beam in the neighbourhood of C_0, defined by the linear equation:

$$Elv^{IV} + \mu\ddot{v} = 0 \, . \tag{1.5}$$

The solution of eq. (1.5), according to (1.4), is:

$$v(z,t) = C \sin n\pi z \cos \omega_n t \tag{1.6}$$

where:

$$\omega_n = n^2\pi^2 \left(\frac{El}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.7}$$

The distance between the initial motion $v(z, 0)$ and the unloaded rectilinear configuration of the beam is:

$$d_1(0) = \frac{C}{\sqrt{2}} \tag{1.8}$$

or, according to (1.3):

$$d_2(0) = C \, . \tag{1.9}$$

At time t, the distance between the generic state of motion of the beam and the state C_0, is:

$$d_1(t) = \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^2 \omega_n t} + \omega_n^2 \sqrt{\sin^2 \omega_n t} \tag{1.10}$$

or:

$$d_2(t) = C[\,|\cos \omega_n t\,| + \omega_n\,|\sin \omega_n t\,|\,] \, . \tag{1.11}$$

We now have:

$$D_1 = \sup_{t>0} d_1(t) = \frac{C}{\sqrt{2}} (1 + \omega_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.12}$$

or:

$$D_2 = \sup_{t>0} d_2(t) = C(1 + \omega_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.13}$$

We then infer that, no matter how small we take the quantity C, that is, no matter how small we take the initial disturbance, according to the initial distance (1.8) or (1.9), there are initial disturbances from which follow motions that, when $t \to \infty$, have distances from the initial state C_0 that increase without any limit.

It is not true that all the motions that start in the vicinity of C_0 always remain near to C_0; we therefore infer, perhaps with some surprise, that the rectilinear unloaded configuration of the beam is unstable. It is indeed; according to (1.8) or (1.9) the number of waves does not appear in the initial distance between the disturbance (1.4) and the state C_0; consequently, even though we reduce the constant C, unbounded quantities of strain energy can be imparted to the beam at the initial time $t = 0$. Because of this we will have unbounded distances from the states of the motion of the beam and the unloaded state C_0.

On the other hand, it is worthwhile remarking again that, by applying the energy criterion in the usual way, we would infer, on the contrary, that the configuration C_0 is stable; in fact the potential energy (1.1) is always positive for any displacement field $v(z, t)$ not identically zero in the interval $(0, l)$.

This contradiction is due to the erroneous application of the energy criterion, corresponding to a superficial way of applying it. We must recall, in fact, by extrapolating the Lagrange-Dirichlet theorem from the discrete to the continuous elastic systems, that it is of major importance to the validity of the energy criterion that the potential energy is at least continuous in the space of the admissible displacements, with respect to the chosen metric of this space.

We can immediately see that, on the contrary, the energy functional (1.1) is not continuous, either with respect to the distance (1.8), or with respect to (1.9). Let us verify the continuity at the rectilinear configuration C_0: then, for any sequence of sisplacements $\{ v_n \}_{n \in N}$ converging on C_0 according to the metric (1.8) or (1.9), that is such that:

$$\lim_{n \to \infty} d_1(v_n, 0) = 0 \; ; \quad \lim_{n \to \infty} d_2(v_n, 0) = 0 \, , \tag{1.14}$$

if the energy function were continuous at C_0 we would have

$$\lim_{n \to \infty} E_2(v_n) = E_2(0) = 0 \, . \tag{1.15}$$

Let us consider now the two displacement sequences:

$$\{ v_n^{(1)} \}_{n \in N} = \frac{1}{n} \sin n\pi z \; ; \quad \{ v_n^{(2)} \}_{n \in N} = \frac{1}{n^2} \sin n\pi z \tag{1.16}$$

both of which converge on the rectilinear configuration C_0 of the beam. On the contrary, we have:

$$\lim_{n\to\infty} E(v_n^{(1)}) = +\infty \; ; \; \lim_{n\to\infty} E_2(v_n^{(2)}) = \frac{\pi^4}{4} El \tag{1.17}$$

and the apparent previous contradiction vanishes.

It is worthwhile remarking again that in the case of discrete systems everything is simpler. For instance, let us consider a discrete beam composed of a finite number of rigid parts connected by elastic springs: then it is easy to recognize that when we limit the maximum amplitude of the displacements, or the mean square of displacements themselves, we also limit the strain energy of the system; the discrete elastic beam at C_0 is stable.

Only in the case of discrete systems, that is of systems whose space of the admissible configurations is finitely dimensional, is there the property of equivalence of all the possible metrics. On the other hand, for a continuous system, it is very clear that the definition of stability is intemately connected with the definition of distance between two different configurations, or two different states of motions. Of course, it is logical to assume that the chosen metric would imply stability of the unloaded natural configuration of the body; consequently, we must take other metrics, different from (1.8) or (1.9) and able to satisfy this fundamental assumption. For instance, if we take as a measure of the distance just the strain energy itself (1.1), the equilibrium of the unloaded beam at the rectilinear configuration C_0 would prove stable.

In the vast literature on problems of stability, buckling, post-buckling etc. of structures, all the above considerations are usually omitted; hence, the above-mentioned discrepancies and some attempts to give a clearer foundation to the stability theory [3], [4]. In the following, we will briefly sketch the main lines of a formulation of a theory of elastic stability of structural systems proposed by Como and Grimaldi [5].

2. — Distance between two configurations of a continuous systems.

Let us consider a structure T and let Ω be the region, sufficiently regular, occupied by T at the natural (stress-free) initial configuration C_i of T. Let:

$$\underset{\sim}{u}(P) \tag{2.1}$$

be a vectorial function, whose domain is Ω, which defines the displacement field that transforms the initial configuration C_i of T into the displaced

configuration C. We will suppose that $\underset{\sim}{u}(P)$ is a continuous function, with all its derivatives, in Ω; moreover, at the boundary $\partial\Omega$, $\underset{\sim}{u}(P)$ will satisfy suitable conditions which we will suppose to be linear, homogeneous and able to prevent any rigid dispacement of T. The set of all vector functions (2.1) satisfying the above mentioned conditions constitutes a vector space which we will denote by the symbol M. The space M is a subspace of $L_2(\Omega)$, the set of all the vector functions with domain Ω, having square integrable in the Lebesgue sense, if we define over M the inner product:

$$\langle \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle = \int_\Omega \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} d\Omega = \int_\Omega u_i v_i d\Omega \tag{2.2}$$

according to the usual notation.

The completion of the space M transfers M into the Hilbert space L_2; of course M is dense at L_2. In this space, two configurations of T defined by the displacement fields $\underset{\sim}{u}_1$ and $\underset{\sim}{u}_2$, have the distance given by the norm:

$$d(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2) = \| \underset{\sim}{u}_1 - \underset{\sim}{u}_2 \| = \left[\int_\Omega (\underset{\sim}{u}_1 - \underset{\sim}{u}_2) \cdot (\underset{\sim}{u}_1 - \underset{\sim}{u}_2) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

with the angles:

$$(\underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2) = \cos^{-1} \frac{\langle \underset{\sim}{u}_1, \underset{\sim}{u}_2 \rangle}{\| \underset{\sim}{u}_1 \| \; \| \underset{\sim}{u}_2 \|} \tag{2.4}$$

On the other hand, we must point out that the scalar product (2.2) and the ordinary metric (2.3) are not suitable for the study of the "mechanical" configurations of the continuous bodies: for instance, the configuration C_1 of T cannot be considered near to the configuration C_2 only since the norm $\| \underset{\sim}{u}_1 - \underset{\sim}{u}_2 \|$ is small. In fact, C_1 and C_2, as far as the strain and stress fields are concerned, can be very distinct in each other.

On the contrary, the "energy" space H_A answers to the point. Let A be the operator of the linear elastic equilibrium of T that transforms each displacement vector $\underset{\sim}{u}$ into the vector $\underset{\sim}{f}$ that defines the load producing, if applied to T at C_i, the same displacement according to the usual linear theory of elasticity:

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \tag{2.5}$$

The operator $\underset{\sim}{A}$ is linear, symmetric, positive definite and therefore satisfies the three conditions:

$$A(a\underset{\sim}{u} + b\underset{\sim}{v}) = a\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u} + b\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v} \; ; \; \langle \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle = \langle \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u} \rangle \tag{2.6}$$
$$\langle \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{u} \rangle \geq \gamma \| \underset{\sim}{u} \|^2 \; \forall \; \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in M, \gamma \in R^+$$

We now construct a new Hilbert space as follows. The elements of the new space include all the elements of the set and we define on them a new scalar product:

$$[\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}] = \langle \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle \tag{2.7}$$

By means of the conditions (2.6) we satisfy the three axions of symmetry, linearity and positivity. The new scalar product generates a new norm which we shall designate by the symbol $|||\ \ |||$:

$$||| \underset{\sim}{u} ||| = [\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{u}]^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

if $u \in M$, then

$$||| \underset{\sim}{u} |||^2 = \langle \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{u} \rangle \tag{2.9}$$

and, by the positive-definitiveness inequality, we have:

$$||| \underset{\sim}{u} ||| \geq k \, \| \underset{\sim}{u} \| \quad k \in R^+ \tag{2.10}$$

The quantities $[\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}]$ and $||| \underset{\sim}{u} |||$ will be called the " energy " product of the elements $\underset{\sim}{u}$ and $\underset{\sim}{v}$ and the " energy " norm of the element $\underset{\sim}{u}$, respectively. In fact, the " energy " norm is twice the internal strain " energy " of T evaluated according to the linear elastic theory.

The space M, with the energy product (2.7), will be designated by M_A; of course, the space M_A is not, as a rule complete. The completion of M_A is made by adding elements of the space $L_2(\Omega)$. According to the inequality (2.6), we associate to any fundamental sequence in the space M_A, a sequence in the space $L_2(\Omega)$ that converges on an element of $L_2(\Omega)$: this element will be the limit of the fundamental sequence in M_A. The " energy " product and the " energy " norm of the limit elements $\underset{\sim}{u}$ and $\underset{\sim}{v}$ will be obtained by continuity: the completed space will be designated by H_A and constitutes a separable Hilbert space.

We will examine now, very briefly, the " energy " spaces and the properties of the " energy " distances corresponding to some structural models; a detailed analysis with the proofs of the various statements is given in [5].

3. — Smoothness properties in H_A of the strain energy functionals of the elastic systems.

3.1 — *The monodimensional beam.*

The " energy " space M_A is the set of functions $v(z)$, the transversal displacement of the beam axis, with second derivatives square integrables on the interval $[0, l]$ and satisfying linear homogeneous boundary conditions involving $v(z)$ or the first derivative $v'(z)$. The " energy " product and the energy norm are

$$[v_1, v_2] = \int_0^l EI v_1'' v_2'' dz$$
$$|||\, v \,|||^2 = \int_0^l EI v''^2 dz; \tag{2.11}$$

it is easy to prove that the elements v of this space are continuous functions with continuous first derivative. According to the assumption of unextensible beam in plane bending the curvature is given by

$$\varrho = \frac{-v''}{(1 - v'^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.12}$$

and when a sequence of displacements $v_n(z)$ converge in " energy " norm, the corresponding curvatures converge in the L_2 norm. When the beam is subjected to an axial load N the total energy functional is then given by

$$\mathscr{E}(v) = \frac{1}{2}\int_0^l EI \frac{v''^2}{1 - v'^2}\, dz + N \int_0^l (\sqrt{1 - v'^2} - 1) dz \tag{2.13}$$

and is defined in the set

$$S = \{ v(z) : \; v'^2 < \delta < 1 , \;\; \forall\, z \in [0, l] \} \tag{2.14}$$

that represents a spherical neighborhood of the origin O. The functional $\mathscr{E}(v)$ is n times strong differentiable ($n \geq 4$) at the origin O with respect to the energy norm.

3.2 — *Bidimensional model of shallow shells.*

The shallow shell theory has been widely used in the analysis of shell buckling and postbuckling behaviour.

Let $\underset{\sim}{u}(x^\alpha)$ be the displacement field (with tangential components u_α and a normal component w of the middle surface of the shell from the reference configuration C_i, where x^α denote a pain of Gaussian surface coordinates. In the contest of a linearized elastic theory, the middle surface strain tensor $\theta_{\alpha\beta}$, the tensor of changes of curvature $\varrho_{\alpha\beta}$ and the tensor of elastic moduli for an isotropic material $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$, are defined as:

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - w b_{\alpha\beta} \tag{2.15}$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = w|_{\alpha\beta} \tag{2.16}$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = G\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}\, a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right) \tag{2.17}$$

where the vertical stroke denotes covariant differentiation, $a_{\alpha\beta}$ and $b_{\alpha\beta}$

are the first and second fundamental tensors of the middle surface in the reference configuration C_i, G is the shear modulus and ν the Poisson's ratio. The strain energy corresponding to the displacement field $\underset{\sim}{u}$ is:

$$W(\underset{\sim}{u}) = \int_s \left(\frac{1}{2} hE^{\alpha\beta\lambda\mu}\theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu} + \frac{1}{24} h^3 E^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\alpha\beta}\varrho_{\lambda\mu}\right) dS \; ; \tag{2.18}$$

the energy product and the energy norm are defined according to (2.21), for instance:

$$|||\, \underset{\sim}{u} \,|||^2 = 2W(u) \tag{2.19}$$

Under the assumption that the shell is properly supported, that is rigidy body motions are excluded, the following inequalities hold:

$$\| w \|^{\frac{1}{2}} = \left(\int_s w^2 dS\right)^{\frac{1}{2}} \leq c \; |||\, \underset{\sim}{u} \,||| \tag{2.20}$$

$$\left[\int_s (a^{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta})^{q/2} \, dS\right]^{1/q} \leq c, \; |||\, \underset{\sim}{u} \,||| \tag{2.21}$$

where $w_{,\alpha}$ is the derivative of W respect to x^α and q is any positive number.

The inequalities (2.20) and (2.21) can be derived from Sobolev embedding theorems and the condition of properly supported shell; and the explicit proof is essentially given in Koiter's paper [8].

Let us now consider the non linear theory of the elastic shallow shell. The strain tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ of the middle surface defined as:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta} \tag{2.22}$$

is the only non linear quantity of the displacement $\underset{\sim}{u}$. The inequality (2.21) allows to state the following result:

$$\left(\int_s \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} dS\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \; |||\, \underset{\sim}{u} \,||| \tag{2.23}$$

and therefore we can affirm that convergence in energy implies also convergence, in the mean square sense, of the strain field. The same property holds obviously for the stress field defined as $\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\lambda\mu}(\gamma_{\lambda\mu} + z\varrho_{\lambda\mu})$, and for the force resultants $N^{\alpha\beta}$ and moment resultants $M^{\alpha\beta}$.

We shall examine directly the functional $E(\underset{\sim}{u})$ corresponding to the increment of potential energy from an equilibrium configuration C_0. We shall restrict also our attention to cases in which the deformations in the

equilibrium state C_0 may be ignored. In this case the potential energy increment for shallow shells, according to Koiter ([10] eq. (3.6)), is specified by:

$$E(\underset{\sim}{u}) = \int_s \left(\frac{1}{2} N^{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} + \frac{1}{2} h E^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{1}{24} h^3 E^{\alpha\beta\lambda\mu} \varrho_{\alpha\beta} \varrho_{\lambda\mu} \right) dS \tag{2.24}$$

where $N^{\alpha\beta}$ denote the tensor of initial stress resultants in the equilibrium state C_0. The energy functional (2.24) applies to both dead loading and pressure loading conditions [10]. The energy functional (2.24) can be defined for every displacement field of the energy space H_A.

We evaluate now the expression of the weak differentials of the potential energy functional given by eq. (2.24), in the equilibrium configuration C_0, coincident with the reference configuration C_i, but characterized by the presence of the axial forces $N^{\alpha\beta}$. It is possible the prove that if $D^{(n)}E(0;\underset{\sim}{u})$ is the weak differential of E of order n, evaluated at the origin along the direction $\underset{\sim}{u}$, we have

$$D^{(n)}E(0;\underset{\sim}{u}) = 0 \qquad \forall\, n > 4 \tag{2.25}$$

and

$$|D^{(s)}E(0;\underset{\sim}{u})| \leq k_s \,|||\underset{\sim}{u}|||^s \qquad s = 2, 3, 4, \qquad k_s > 0 \tag{2.26}$$

and $E(\underset{\sim}{u})$ is indefinitely strong differentiable.

3.3 — *The tridimensional body.*

Let

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.27}$$

be the first order components of the strain tensor, where:

$$[\nabla u]_{ij} = [u_{i,j}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right] \tag{2.28}$$

is the material displacement gradient tensor and X_i the coordinates of the generic point P in the configuration C_i. The corresponding stress tensor according to the generalized Hooke law is:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = C_{ijpq}\varepsilon_{pq}^{(1)} \tag{2.29}$$

where C_{ijpq} is the elastic tensor at C_i.

The additional strain energy, according to the linear theory of elasticity, is therefore given by:

$$W(\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)} d\Omega = \frac{1}{2}\langle \underset{\sim}{\sigma}^{(1)}, \underset{\sim}{\varepsilon}^{(1)} \rangle \tag{2.30}$$

The energy norm and the energy product can be therefore written as:

$$\begin{aligned} |||\, \underset{\sim}{u} \,|||^2 &= 2W(\underset{\sim}{u}) \\ [\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}] &= \langle\, \underset{\sim}{\sigma}^{(1)}(\nabla \underset{\sim}{u}), \underset{\sim}{\varepsilon}^{(1)}(\nabla \underset{\sim}{v}) \rangle \end{aligned} \tag{2.31}$$

Let $\{ \underset{\sim}{u}_n \}_{n \in N}$ be a sequence of displacement fields of H_A converging to the element $\underset{\sim}{u}_0$ in the sense that:

$$\lim_{n \to \infty} |||\, \underset{\sim}{u}_n - \underset{\sim}{u}_0 \,||| = 0 \tag{3.32}$$

Because of a fundamental inequality:

$$|||\, \underset{\sim}{u} \,||| \geq \gamma \, \| \nabla \underset{\sim}{u} \| \tag{2.33}$$

where $\nabla \underset{\sim}{u}$ is the displacement gradient tensor and:

$$\| \nabla \underset{\sim}{u} \|^2 = \int_\Omega \mathrm{tr}(\nabla^T \underset{\sim}{u} \,.\, \nabla \underset{\sim}{u}) d\Omega = \int_\Omega u_{i,j} u_{i,j} d\Omega \,, \tag{2.34}$$

we infer that if a sequence of displacement fields converge in the energy norm on the displacement field $\underset{\sim}{u}_0$, the corresponding sequences of the infinitesimal strain $\underset{\sim}{\varepsilon}^{(1)}$ and rotation tensors $\underset{\sim}{\omega}^{(1)}$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \;;\; \omega_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{2.35}$$

converge in the ordinary norm, that is in the mean square sense, respectively on:

$$\varepsilon_{0_{ij}}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{0_{i,j}} + u_{0_{j,i}}) \;;\quad \omega_{0_{ij}}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{0_{i,j}} - u_{0_{j,i}}) \,, \tag{2.36}$$

the infinitesimal strain and rotation tensors corresponding to the displacement $\underset{\sim}{u}_0$.

Similarly, for the stress field $\underset{\sim}{\sigma}^{(1)}$ corresponding to the strain $\underset{\sim}{\varepsilon}^{(1)}$, according to the usual stress-strain laws, an analogous result holds. In short, for the linear theory of elasticity it is well known that closeness between two displacement fields $\underset{\sim}{u}_1$ and $\underset{\sim}{u}_2$, near in the sense of the " energy " metric (2.31), also implies closeness between strains and stresses in the sense of the ordinary norm.

More difficult and complex is the case of finite strains; on the other hand, according to the results obtained by Como and Grimaldi [5]-[11], we can also affirm that the finite stretch tensor U_{ij} and the finite rotation tensor R_{ij}, defined by the decomposition

$$R_{ik} U_{kj} = \delta_{ij} + u_{i,j} \tag{2.37}$$

converge in the mean square sense when the displacement field converges in the "energy" norm; the Green deformation tensor $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ converges in the mean of the absolute value.

As far as the convergence of the stress field is concerned, obviously we have to specify the stress tensor and the constitutive equation of the material. Let, for an hyperelastic material:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u}) \tag{2.38}$$

be the elastic constitutive equation, where $\underset{\sim}{\sigma}$ is the first Piola-Kirchoff stress tensor; in this Paper the following restriction on the constitutive equation will be examined:

$$\exists\, \chi_1 > 0 : \quad |\underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{v})| \leq \chi_1 \,|\nabla \underset{\sim}{u} - \nabla \underset{\sim}{v}| \quad \forall\, \nabla \underset{\sim}{u}, \nabla \underset{\sim}{v} \tag{2.39}$$

where $|\underset{\sim}{T}| = (T_{ij}T_{ij})^{\frac{1}{2}}$ denotes the norm of a tensor $\underset{\sim}{T}$.

If eq. (2.39) holds we immediately obtain the inequality:

$$\| \underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{v}) \| \leq k_1 \,\| \nabla \underset{\sim}{u} - \nabla \underset{\sim}{v} \| \quad \forall\, \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in H_A \tag{2.40}$$

and therefore the stress field $\underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u})$ converges in the mean square sense when the displacement field converges in the "energy" norm.

Let u be any displacement field belonging to the space M_A. The strain energy $W(\underset{\sim}{u})$ can be evaluated along any path connecting C_i and C in M_A, and therefore, for instance, along the linear path defined by the displacement set:

$$\{ \alpha \underset{\sim}{u} \,;\ \ \forall\, \alpha :\ \ 0 \leq \alpha \leq 1 \}. \tag{2.41}$$

Let σ_{ij} indicate the first Piola-Kirchoff stress tensor, which we will suppose to be a continuous function of ∇u; thus we can write:

$$\left[\frac{dW}{d\alpha}\right]_{c'} = \int_\Omega \sigma_{ij}(\nabla \alpha \underset{\sim}{u}) \,\frac{d}{d\alpha}\,(\alpha u_{i,j}) d\Omega = \langle \sigma_{ij}(c'), u_{i,j} \rangle \tag{2.42}$$

if $\sigma_{ij}(\nabla \alpha \underset{\sim}{u})$ represents the stress at the configuration C', defined by the displacement $\alpha \underset{\sim}{u}$. Because of the hypothesis of hyperelasticity, the differential form (2.42) is integrable. Thus the strain energy functional is:

$$W(\underset{\sim}{u}) = \int_0^1 d\alpha \int_\Omega \sigma_{ij}(\nabla \alpha \underset{\sim}{u}) \,\frac{d}{d\alpha}\,(\alpha u_{i,j}) d\Omega \tag{2.43}$$

We can give the following theorem on the strong differentiability of order one of $W(\underset{\sim}{u})$: if in every point P of Ω the constitutive equation $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{f}(\nabla \underset{\sim}{u})$ satisfies the condition:

$$\exists\, \chi_1 > 0 : \quad |\underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u}_1) - \underset{\sim}{\sigma}(\nabla \underset{\sim}{u}_2)| \leq \chi_1 \,|\nabla \underset{\sim}{u}_1 - \nabla \underset{\sim}{u}_2| \quad \forall\, \nabla \underset{\sim}{u}_1, \nabla \underset{\sim}{u}_2 \tag{2.44}$$

then the strain energy in once Fréchet differentiable at every $\underset{\sim}{u} \in M_A$.

In fact we can write, according to thc Lagrange theorem:

$$W(\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}) - W(\underset{\sim}{u}) = DW(\underset{\sim}{u}; \underset{\sim}{v}) + [DW(\underset{\sim}{u} + \theta\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{v}) - DW(\underset{\sim}{u}; \underset{\sim}{v})]$$

therefore:

$$|DW(\underset{\sim}{u} + \theta\underset{\sim}{v}) - DW(\underset{\sim}{u}; \underset{\sim}{v})| \leq \| \underset{\sim}{\sigma}(\nabla(\underset{\sim}{u} + \theta\underset{\sim}{v})) - \underset{\sim}{\sigma}(\nabla\underset{\sim}{u}) \| \quad \| \nabla\underset{\sim}{v} \|$$

and

$$\frac{|DW(\underset{\sim}{u} + \theta\underset{\sim}{v}) - DW(\underset{\sim}{u}; \underset{\sim}{v})|}{\| \nabla\underset{\sim}{v} \|} \leq \chi_1 \| \nabla(\underset{\sim}{u} + \theta\underset{\sim}{v}) - \nabla\underset{\sim}{u} \| \leq \frac{\chi_1}{\gamma} ||| \underset{\sim}{v} ||| \tag{2.45}$$

Eq. (2.45) shows that if the condition (2.44) is satisfied, the strain energy functional $W(\underset{\sim}{u})$ is Fréchet differentiable in the space M_A. We will suppose that the same property holds for $Q(\underset{\sim}{u})$, as can be esasily shown for some simple cases of loadings, for instance dead loads.

In conclusion we can state that the condition (2.44) implies that the potential energy $E(\underset{\sim}{u})$ is a strong differentiable functional in M_A.

On the other hand as shown by Martini [9], the strain energy functional never can be twice continuously differentiable with respect to the energy norm. Therefore in this case only a special type of conditional differentiability can be proved [5].

A complete answer to the problem can be obtained only, as proposed by Koiter in [3], accepting the assumption of dependence of the strain energy density also on the strain gradients.

4. — Stability of an equilibrium configuration: the energy criterion.

On the basis of the differentiability properties of the energy functional, stated in the previous paragraph, we examine now the validity of some static criteria of stability as sufficient conditions for the stability of the structure in the dynamic sense of Liapunov.

Let C_0 be an assigned equilibrium configuration of an elastic structure T, subjected to conservative loads. The velocity fields of T during its motion, are assumed to be elements of the space $L_2(\Omega)$. The Hilbert space H_{A_m} of the states of motion $\begin{pmatrix} \underset{\sim}{u} \\ \dot{\underset{\sim}{u}} \end{pmatrix}$ of T is then defined as the product space:

$$H_{A_m} = H_A \times L_2 \tag{4.1}$$

with the inner product:

$$\left[\begin{pmatrix} \underset{\sim}{u} \\ \dot{\underset{\sim}{u}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underset{\sim}{v} \\ \dot{\underset{\sim}{v}} \end{pmatrix}\right] = [\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}] + \langle \dot{\underset{\sim}{u}}, \dot{\underset{\sim}{v}} \rangle \tag{4.2}$$

The total energy of T is the functional, whose domain is $\underset{\sim}{H}_{Am}$:

$$E_t(\underset{\sim}{u}, \dot{\underset{\sim}{u}}) = E(\underset{\sim}{u}) + E(\dot{\underset{\sim}{u}}) \tag{4.3}$$

where:

$$E(\dot{\underset{\sim}{u}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varrho \dot{\underset{\sim}{u}}^2 \, d\Omega \tag{4.4}$$

is the kinetic energy and ϱ the density mass. It is evident that the assumed regularity of $E(\underset{\sim}{u})$, for instance first order strong differentiability, also implies that the total energy $E_t(\underset{\sim}{u}, \dot{\underset{\sim}{u}})$ is once Fréchet differentiable in the space $\underset{\sim}{H}_{Am}$.

The Liapunov definition of stability of the equilibrium configuration C_0, corresponding to the displacements u_0, can now be given in the form: *The equilibrium configuration C_0 is Liapunov stable if:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \begin{bmatrix} \underset{\sim}{u}(o) \\ \dot{\underset{\sim}{u}}(o) \end{bmatrix} \in H_{Am}\,, \quad ||| \underset{\sim}{u}(o) ||| + \| \dot{\underset{\sim}{u}}(o) \| < \delta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad ||| \underset{\sim}{u}(t) ||| + \| \dot{\underset{\sim}{u}}(t) \| < \varepsilon \qquad \forall\, t > 0\,. \tag{4.5}$$

We can now assume that the equilibrium configuration C_0 corresponds to $\underset{\sim}{u}_0 = 0$ and $E(\underset{\sim}{u}_0) = 0$. Then the classical "energy" criterion of stability can be stated in the following form (Lagrange-Dirichlet theorem):

THEOREM 4.1 — *The equilibrium configuration C_0 is Liapunov stable if:*

$$\exists\, \bar{\varrho} > 0 : \quad 0 < \varrho < \bar{\varrho} \Longrightarrow \inf_{IS\varrho} E(\underset{\sim}{u}) > 0 \tag{4.6}$$

where IS_ϱ denotes the sphere of radius ϱ in $\underset{\sim}{H}_A$, that is the set:

$$IS_\varrho = \{\, \underset{\sim}{u} \in H_A : ||| \underset{\sim}{u} ||| = \varrho \,\}\,. \tag{4.7}$$

The proof of the Lagrange-Dirichlet theorem is based only on the assumption of continuity with respect to the energy norm of the potential energy functional [1], [5]. In the previous section we have shown that this property is satisfied for the structural models examined (beams and shells). Therefore we conclude that for these models the static energy criterion of stability (4.6) is a sufficient condition of Liapunov stability in the sense (4.5).

Moreover, it is necessary to remark that condition (4.6) is a stronger version of the statement, usually accepted in structural mechanics, that the minimum of the potential energy, that is:

$$\exists\, \bar{\varrho} > 0 : \quad \forall\, \underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{H}_A : \quad 0 < ||| \underset{\sim}{u} ||| < \bar{\varrho} \Longrightarrow E(\underset{\sim}{u}) > 0 \tag{4.8}$$

implies stability.

In fact, the sphere IS_ϱ is not a compact set in $\underset{\sim}{H}_A$ and therefore in spite of the continuity of $E(\underset{\sim}{u})$ in $\underset{\sim}{H}_A$, the minimum of $E(\underset{\sim}{u})$ in IS_ϱ could not exist. Hence, according to the criterion (4.6), even if we have $E(\underset{\sim}{u}) > 0 \ \forall \ \underset{\sim}{u} \in IS_\varrho$, the greatest lower bound of $E(\underset{\sim}{u})$ in IS_ϱ could be equal to zero. Therefore, the definition of stability (4.8) is weaker then definition (4.6), and, chiefly, it is not able to imply the stability in the Liapunov sense. Nevertheless, the difference between the two definitions vanishes when the system T only has a finite number of degrees of freedom, because in this case $\underset{\sim}{H}_A$ is a finite dimensional space and the sphere IS_ϱ becomes a compact set. The definition (4.6) as a static criterion of dynamic stability is therefore compulsory for continuous systems. To get now an operative criterion of stability it is useful to observe that the statement:

$$\exists \gamma > 0, \ \bar{\varrho} > 0, \ \alpha > 0 : \forall \ \underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{H}_A : 0 < |||\underset{\sim}{u}||| < \bar{\varrho} \Longrightarrow E(\underset{\sim}{u}) \geq \gamma \, |||\underset{\sim}{u}|||^\alpha \tag{4.9}$$

obviously implies condition (4.6) and then also constitutes a static criterion of stability.

We examine now the problem of the validity on the classical test of stability related to the analysis of the second differential of the potential energy functional, that is of the linear theory of stability.

As it is well known that, according to the linear theory, the potential energy of the system is represented by a quadratic functional that corresponds essentially to the second derivative $D^{(2)}E(0, \underset{\sim}{u})$ of the potential energy functional $E(\underset{\sim}{u})$, evaluated at the equilibrium configuration C_0 ($\underset{\sim}{u}_0 = 0$). Then if, with a suitable choice of the norm $\varrho(\underset{\sim}{u})$, the following conditions is satisfied:

$$D^{(2)}E(0; \underset{\sim}{u}) \geq \gamma_1 \varrho^2(\underset{\sim}{u}) \Longrightarrow E(\underset{\sim}{u}) \geq \gamma_2 \varrho^2(\underset{\sim}{u}) \tag{4.10}$$

to have stability at C_0, it is sufficient to prove that C_0 is stable, in the sense of the linear theory, that is, of the so called " infinitesimal stability ".

The following theorem, which permits control of the validity of the classical linear theory of elastic stability in the large context of the non-linear theory, gives:

THEOREM 4.2 — *Let $E(\underset{\sim}{u})$ be two-times Fréchet differentiable in M_A at the equilibrium configuration C_0 and Let S^* be the unit sphere in the space $\underset{\sim}{H}_A$. The elastic system T is stable at the C_0 if*:

$$\omega = \inf_{S^*} E_2(\underset{\sim}{u}) > 0 \, . \tag{4.11}$$

According to Taylor's theorem, we have, in fact

$$E(\underset{\sim}{u}) = E_2(\underset{\sim}{u}) + O(|||\underset{\sim}{u}|||^2)$$

If $\underset{\sim}{u}^*$ is a generic element of S^*, that is, such that $|||\underset{\sim}{u}^*||| = 1$, we get:

$$E(\underset{\sim}{u}) = |||\underset{\sim}{u}|||^2 \left\{ E_2(\underset{\sim}{u}^*) + \frac{O(|||\underset{\sim}{u}|||^2)}{|||\underset{\sim}{u}|||^2} \right\}$$

and according to (4.11):

$$E(\underset{\sim}{u}) \geq |||\underset{\sim}{u}|||^2 \left[\omega + \frac{O(|||\underset{\sim}{u}|||^2)}{|||\underset{\sim}{u}|||^2} \right] \geq |||\underset{\sim}{u}|||^2 \left[\omega - \frac{|O(|||\underset{\sim}{u}|||^2)|}{|||\underset{\sim}{u}|||^2} \right]$$

Hence, because:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varrho > 0 : \forall \underset{\sim}{u} \in H_A : 0 < |||\underset{\sim}{u}||| < \varrho \Longrightarrow \left| \frac{O(|||\underset{\sim}{u}|||^2)}{|||\underset{\sim}{u}|||^2} \right| < \varepsilon$$

we can chose ε such that $\omega - \varepsilon > 0$ and obtain:

$$\exists \varrho > 0 : \quad 0 < |||\underset{\sim}{u}||| < \varrho \Longrightarrow E(\underset{\sim}{u}) > (\omega - \varepsilon) |||\underset{\sim}{u}|||^2 > 0$$

and the proof is completed.

We observe now that, if the assumption of the theorem 4.2 are satisfied, the natural configuration of an elastic structure turns out to be stable: in fact in this case we have $E_2(u) = \frac{1}{2} |||\underset{\sim}{u}|||^2$ and therefore in this case $\omega = \frac{1}{2}$.

The previous theorem is based on the twice strong differentiability of the energy functional in the space M_A. This property holds true for the monodimensional beam model: and for the shallow shells, as shown in the paragraph 3, and therefore we can affirm that the criterion of the second differential is a sufficient condition of stability for these models. The case of the tridimensional model is more complicated.

A special solution to this problem is given by Koiter [2] with the assumption that the energy functional depends not only from the strain field, but also from the strain's gradient. He gives a reasonable physical motivation of this assumption and shows that an arbitrary small term in the energy functional, depending on the strain gradient, can allow to prove the validity of the second differential criterion as a sufficient condition of dynamical stability with respect to a suitable norm. We think that, however Koiter's result don't refer specifically to simple elastic material, it is the most complete and satisfactory answer given until now to the problem we are dealing with.

Let's now analyze the operative results that follow from the stability condition (4.11). In fact if the functional $E_2(\underset{\sim}{u})$ obtains its minimum over S^* (this assumption will be discussed later), that is:

$$\exists \underset{\sim}{u}_1 \in S^* : E_2(\underset{\sim}{u}_1) = \min E_2(\underset{\sim}{u}) = \omega \tag{4.12}$$

we find that ω_1 and $\underset{\sim}{u}_1$ are the smallest eigenvalue and the corresponding eigenelement of the variational problem:

$$E_{11}(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\eta}) - \omega[\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\eta}] = 0 \quad \forall \underset{\sim}{\eta} \in H_A \tag{4.13}$$

where $E_{11}(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v})$ is the bilinear functional associated to $E_2(\underset{\sim}{u})$. The stability criterion (4.11) then gives rise to the linear variational problem (4.13), which is well known for its applicability to practical problems.

In order to apply, the variational condition (4.13), to test the stability of the system, it is, however, necessary to prove the existence of the element $\underset{\sim}{u}_1$ which gives the minimum of $E_2(\underset{\sim}{u})$ in S^*. To overcome this difficulty we observe that in most structural problems the second differential $E_2(\underset{\sim}{u})$ can be written as:

$$E_2(u) = \tfrac{1}{2} ||| \underset{\sim}{u} |||^2 - \lambda L_2(\underset{\sim}{u}) \tag{4.14}$$

where λ is the load multiplier and $L_2(\underset{\sim}{u})$ an undefinite quadratic functional that describes the destabilizing effect of the loads.

This is possible because, in most cases, the equilibrium configuration C_0, the stability of which is investigated, is in the vicinity of the natural configuration C_i of the structure, and then it is correct, in evaluating $E_2(\underset{\sim}{u})$, to retain only the linear terms in the loading parameter λ. Thus we can demonstrate the following theorem:

" If, for any sequence $\{ u_n \}_{n \in N}$ of displacements fields bounded in H_A, it is possible to pick out a subsequence $\{ \varphi_k \}_{k \in N}$ such that:

$$\lim_{k,m \to \infty} L_2(\underset{\sim}{\varphi}_k - \underset{\sim}{\varphi}_m) = 0 \tag{4.15}$$

then an element of S^* exists which gives the minimum of the functional $E_2(\underset{\sim}{u})$ on S^*, with $E_2(\underset{\sim}{u})$ defined by equation (4.14) ".

The proof of this theorem, although different, goes back to the classical approach of the proof of existence of the smallest eigenvalue of a positive definite operator (cfr. [7], p. 132).

We will show now that the condition (4.15), which is sufficient to ensure the existence of the minimum of $E_2(\underset{\sim}{u})$ on the unit sphere S^*, is usually satisfied in the structural problem.

(i) Beams

$$||| \underset{\sim}{u} |||^2 = \int_0^l EIv''^2 dx \qquad L_2(\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{2}\int_0^l Nv'^2 dx \tag{4.16}$$

according to the most common notation. Thus, in this case, the corresponding " energy " space H_A is isomorphic with a subspace of the Sobolev space H_2, while $| L_2(\underset{\sim}{u}) | \leq K \int_0^l v'^2 dx = K \| \underset{\sim}{v} \|_1$, if $\| \underset{\sim}{u} \|_1$ denotes the norm in the Sobolev space H_1, [7]. Thus, according to the " embed-

ding " theorems of H_2 in the space H_1, any set bounded in H_2 is compact in H_1. The assumptions of the theorem (4.15) are therefore satisfied.

(ii) Shallow shells

$$|||\underset{\sim}{u}|||^2 = \int_S \left[\frac{1}{2} hE^{\alpha\beta\lambda\mu}\theta_{\alpha\beta}\theta_{\lambda\mu} + \frac{h^3}{24} E^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\alpha\beta}\varrho_{\lambda\mu} \right] dS$$

$$L_2(\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{2}\int_S N^{\alpha\beta} w,w_{\alpha,\beta} dS . \tag{4.17}$$

The following relations hold

$$|||\underset{\sim}{u}|||^2 \geq K_1 \|\underset{\sim}{u}\|_2^2 \qquad |L_2'(\underset{\sim}{u})| \leq \|\underset{\sim}{u}\|_1^2 \tag{4.18}$$

Any set of displacement fields bounded in the " energy " norm is bounded in H_2 and is therefore compack in H_1, that is, in the sense of the convergence in $L_2(\underset{\sim}{u})$. The assumption sof the theorem (4.15) are therefore satisfied.

(iii) Three-dimensional bodies.

In this case, the assumption of theorem (4.15) cannot be fulfilled because the " energy " norm of $\underset{\sim}{u}$ and $L_2(\underset{\sim}{u})$ are bounded by the norm of the same Sobolev space H_1.

4.1 — *Critical state. Stability at the critical state.*

If we have:

$$\inf_{S^*} E_2(\underset{\sim}{u}) = 0 \tag{4.19}$$

the equilibrium of T is at the critical state. In such a situation the stability criterion (4.11) fails and the quality of the equilibrium has to be decided.

We now assume, according to the previous analysis, the existence of a displacement field $\underset{\sim}{u}_c^*$ such that:

$$E_2(\underset{\sim}{u}_c^*) = \underset{S^*}{\text{Min}}\, E_2(\underset{\sim}{u}_c^*) = 0 . \tag{4.20}$$

The critical displacement $\underset{\sim}{u}_c^*$ is then the solution of the classical variational problem

$$E_{11}(\underset{\sim}{u}_c^*, \underset{\sim}{\eta}) = 0 \quad \forall \underset{\sim}{\eta} \in \underset{\sim}{H}_A \tag{4.21}$$

If, at the critical state $E_3(\underset{\sim}{u}_c^*) \neq 0$, it is always possible to take a displacement $\underset{\sim}{u}_c = \alpha \underset{\sim}{u}_c^*$ for which $E(\underset{\sim}{u}_c) < 0$, and the stability criterion (4.6) cannot be applied. Nevertheless, in this case, although the minimum of the potential energy is not a necessary condition of stability, the equilibrium of C_0 is generally assumed to be unstable.

In the case $E_3(\underset{\sim}{u}_c) = 0$, the following condition of stability can be stated.

The equilibrium at the critical state is stable if:

$$E_3(\underset{\sim}{u}_c^*) = 0 \,; \quad E_4(\underset{\sim}{u}_c^*) - E_2(\underset{\sim}{\varphi}_1) = 0 \tag{4.22}$$

where $\underset{\sim}{\varphi}_1$ is the unique solution of the variational problem:

$$E_{11}(\underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{\eta}) + E_{21}(\underset{\sim}{u}_c^*, \underset{\sim}{\eta}) = 0 \quad \forall\, \underset{\sim}{\eta} \in \underset{\sim}{H}_A \,. \tag{4.23}$$

With the assumption that the potential energy is 4 times Fréchet differentiable, it is easy to show that condition (4.22) implies the following inequality:

$$\exists\ \bar{\varrho} > 0, \gamma > 0 : \forall u : 0 \leq |||\, \underset{\sim}{u} \,||| < \bar{\varrho} \Longrightarrow E(\underset{\sim}{u}) \geq \gamma \,|||\, \underset{\sim}{u} \,|||^4 \tag{4.24}$$

which ensures the stability in the Liapunov sense of the critical state.

Therefore condition (4.22) is a sufficient condition of stability for the monodimensional and bidimensional structural models previously examined; in fact for these models the energy functional is 4-times Fréchet differentiable. For the tridimensional elastic body condition (4.22) gives only a partial result, in the sense that it is possible to show that (4.22) implies stability only with respect to the initial disturbances by which follow motions satisfying the condition that $\begin{pmatrix} \underset{\sim}{u}(t) \\ \dot{\underset{\sim}{u}}(t) \end{pmatrix}$ belongs to the subset $\underset{\sim}{D}_c^{(4)} \times L_2$ of $\underset{\sim}{H}_{Am}$.

Condition (4.22) has been given for the first time by Koiter in his pioneering thesis [12].

BIBLIOGRAPHY

[1] Knops R. J. & Wilkes E. W., *Theory of elastic stability*, " Handbuch der Physik ", Band VIa/3, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1973).

[2] Koiter W. T., *A basic open problem in the theory of elastic stability*, " Paper presented at the Joint IUTAM/IMU Symposium on Applications of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics ", Marseille, September 1-6 (1975).

[3] Koiter W. T., *The energy criterion of stability for continuous elastic bodies*, I and II " Proc. Kominkl. Ned. Akad. Wetenschap ", B 68, 178-189, 190-202 (1965).

[4] Naghdi P. M. & Trapp J. A., *On the general theory of stability for elastic bodies*, " Arch. Rational Mech. Anal. ", 51, 165-191 (1973).

[5] Como M. & Grimaldi A., *Stability, buckling and postbuckling of elastic structures*, Meccanica, AIMETA, 4, vol. X (1975).

[6] Mikhlin S. G., *The problem of the Minimum or a Quadratic Functional*, Holden-Day, San Francisco (1965).

[7] MIKHLIN S. G., *Mathematical Physics, An advanced course*, North Holland Pub. Co., Amsterdam (1970).

[8] KOITER W. T., *A sufficient condition for the stability of shallow shells*, " Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. ", B70, 367-375 (1967).

[9] MARTINI R., *On the Fréchet differentiability of certain energy functionals*, To be published in " Proc. Kominkl. Ned. Aked. Wetenschap ", Amsterdam.

[10] KOITER W. T., *General equations of elastic stability for thin shells*, Proc. Symp. in honor L. M. Donnell, University of Houston (April 1966).

[11] COMO M. & GRIMALDI A., *Stability, buckling and postbuckling of elastic structures*, Report n. 1-2-3, University of Calabria, I vol. (1974).

[12] KOITER W. T., *Over de stabiliteit von het elastisch evenwicht*, Thesis, Delft, M. J. Paris, Amsterdam (1945), English Transl. NASA TT-F-10, 833 (1967).

[13] COMO M. & GRIMALDI A., *Liaupunov stability of the Euler column*, «Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Acc. Naz. Lincei», Sess. estiva (1976).

[14] COMO M. & GRIMALDI A., *On the foundations of the stability theory of elastic structures*, Meccanica, AIMETA, 3, vol. X (1975).

GAETANO FICHERA (*)

Problemi unilaterali nella statica dei sistemi continui.

Riassunto. — *Viene mostrato come la teoria esistenziale per i problemi unilaterali della statica dei continui, sorta in Italia nel 1963, abbia influenzato l'opera di ricercatori italiani e stranieri che, successivamente, si sono occupati di questo argomento. Vengono anche mostrati risultati recenti ottenuti nell'ambito di una corretta formulazione astratta della teoria.*

La presente conferenza riprende, a distanza di dodici anni, l'argomento di quella che, nel 1963, in occasione del Convegno Lagrangiano, promosso dall'Accademia delle Scienze di Torino, ebbi l'onore di tenere in questa stessa aula.

L'argomento, allora nuovissimo, ha avuto, in questi dodici anni, uno straordinario sviluppo e vastissima è oggi la bibliografia sui «problemi unilaterali». Desidero qui intrattenermi sui risultati che, in modo particolare, riguardano la Statica dei sistemi continui e riportare un mio recente risultato che inquadra, in un assetto generale astratto, quelli da me ottenuti nell'ormai lontano 1963.

Occorre dire che tale formulazione astratta è stata, in verità in modo non del tutto soddisfacente, tentata da taluni Autori, dopo che le mie ricerche del 1963 avevano dato inizio alla teoria esistenziale dei problemi unilaterali.

I problemi al contorno per operatori differenziali di tipo ellittico portano ai seguenti problemi di Analisi funzionale. Sia H uno spazio di Hilbert che, per semplicità, supponiamo essere reale. Sia V un sottospazio lineare chiuso di H e $B(u, v)$ una forma bilineare reale definita su $V \times V$ ed ivi continua. Sia $F(v)$ un funzionale lineare continuo definito su V. Il problema da considerare è il seguente:

$$B(u, v) = F(v), \quad u \in V, \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

(*) Università di Roma.

Sono ben note le condizioni cui debbono soddisfare B ed F per l'esistenza e l'unicità di una soluzione u del problema (1). Nel caso in cui $B(u, v)$ è simmetrica, si ottengono le equazioni (1) imponendo al funzionale

$$\mathfrak{J}(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - F(v) \tag{2}$$

la condizione necessaria al conseguimento di un minimo su V.

Le applicazioni impongono spesso la considerazione di problemi connessi a « vincoli unilaterali ». Tali problemi consistono nel sostituire alle equazioni classiche — sia all'interno del dominio che al contorno — condizioni espresse da diversi tipi di diseguaglianze. Problemi siffatti vengono principalmente proposti dalla Meccanica e dalla Fisica, allorché la struttura materiale in esame viene sottoposta a *vincoli unilaterali*, cioè quando la classe V degli spostamenti ammissibili contiene vettori *irreversibili*. Ciò significa che $v \in V$ *non implica* $-v \in V$.

Il prototipo di questo genere di problemi è quello proposto nel 1933 e, più esplicitamente nel 1959, da Antonio Signorini [1], [2], noto attualmente come *problema di Signorini*. Lo studio analitico di questo problema, pubblicato nel 1963 [3], diede inizio alla teoria esistenziale dei *problemi unilaterali*, che alcuni Autori, alquanto impropriamente, chiamano *diseguaglianze variazionali* (1).

(1) I risultati contenuti nel lavoro [3], concernenti l'esistenza e l'unicità per il problema di Signorini, sono i primi connessi allo studio esistenziale di un problema unilaterale. Tali risultati vennero annunciati nel febbraio 1963 (cfr. [4]) e pubblicati in un lavoro [3] presentato per la pubblicazione nel settembre 1963. Essi formarono oggetto di seminari tenuti dallo scrivente nel maggio 1963 presso l'Istituto di Alta Matematica a Roma. A tali seminari assistettero i Proff. M. Picone e B. Segre dell'Università di Roma, il Prof. F. John della New York University e la Prof. Olga Oleinik dell'Università di Mosca. Gli anzidetti risultati vennero inoltre comunicati in due Convegni: il primo ebbe luogo a Tbilisi (settembre 1963, [5]) ed il secondo a Torino (Convegno Lagrangiano, ottobre 1963 [6]). Occorre dire che un pre-print, in lingua inglese, del lavoro [3], era stato largamente diffuso e pubblicato sui « Seminari dell'Istituto di Alta Matematica » 1962-63 (Ediz. Cremonese, Roma).

Il Prof. Stampacchia, in un suo articolo di sintesi (cfr. [7], p. 191) scrive: « The first existence and uniqueness theorem for the solution of variational inequalities was proved in [8] ». Il Prof. Stampacchia partecipò al suddetto Convegno di Torino e fu presente alla mia conferenza. Il suo lavoro [8] è stato presentato per la pubblicazione nell'aprile 1964. Nessun riferimento è fatto, né in [7], né in [8], ai lavori [3], [4], [5], [6]. Si confronti, comunque, il teor. 1 di [8] con l'Osservazione II di p. 120 di [3] ed il teor. 8 di [8] con il teor. XIX di p. 120 di [3].

È veramente un peccato che l'Autore di [8] sia stato così poco accurato nei riferimenti bibliografici, dato che la Nota [8] è certamente valida nella teoria dei problemi variazionali, poiché in essa, per la prima volta, vengono considerati problemi unilaterali relativi a forme bilineari non simmetriche. Occorre però anche dire che i risultati di [3] non possono dedursi da quelli di [8], dato che l'ipotesi di *coercizione*, assunta in [8], è non soddisfatta dal problema studiato in [3].

Supponiamo che $B(u, v)$ sia simmetrica e che V sia un insieme chiuso e convesso su H. Se imponiamo al funzionale dato dalla (2) la condizione necessaria per ottenere un minimo in V, facilmente ricaviamo:

$$B(u, v-u) \geq F(v-u), \quad u \in V, \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

Questo è un *problema unilaterale astratto*. Naturalmente, nello studio di questo problema, si può considerare pure il caso più generale in cui B non è simmetrico.

Si deve osservare che il problema (3) presenta gradi di difficoltà ben diversi, a seconda che $B(v, v)$ sia *coercitiva*, oppure no; Se $B(v, v)$ è coercitiva su $\| v \|^2$, cioè se esiste una costante positiva c tale che

$$B(v, v) \geq c \| v \|^2,$$

allora la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità di una soluzione u del problema unilaterale (3) è quasi banale nel caso in cui $B(u, v)$ è simmetrica. Infatti, in questo caso il problema è facilmente ridotto all'esistenza della proiezione univoca di un punto di uno spazio di Hilbert H in un sottoinsieme chiuso e convesso di H. Il caso non simmetrico è facilmente ridotto a quello simmetrico in base ad un semplice ragionamento basato sull'uso di un'opportuna contrazione (cfr. [9], p. 496).

Molto più difficile è il caso in cui $B(v, v)$ non è coercitiva su $\| v \|^2$, ma soddisfa solo ad una condizione di semi-coercitività. È proprio questo il caso del problema di Signorini.

Consideriamo il caso particolare concernente il problema di Signorini. Sia A un dominio limitato dello spazio cartesiano X^r, avente contorno ∂A regolare a tratti e soddisfacente ad un'ipotesi del cono ristretta. Tipi siffatti di domini, che io sono andato considerando da quasi 30 anni a questa parte, vengono denominati, nei miei lavori, « domini propriamente regolari ».

Sia $v(x)$ una funzione regolare r-vettoriale definita in A. Lo spazio H sia quello che si ottiene per completamento funzionale mediante la norma

$$\| v \|^2 = \int_A | v |^2 dx + \frac{1}{4} \int_A (v_{i/k} + v_{k/i})(v_{i/k} + v_{k/i}) dx . \tag{4}$$

Indichiamo con $\varepsilon_{ik}(v)$ le componenti della deformazione (linearizzata)

$$\varepsilon_{ik}(v) = \frac{1}{2} (v_{i/k} + v_{k/i})$$

e consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$B(u, v) = \int_A a_{ik.jh}(x) \varepsilon_{ik}(u) \varepsilon_{jh}(v) dx . \tag{5}$$

Le funzioni a valori reali $a_{ik,jh}$ sono supposte regolari in $\bar{A}$ — per esempio appartenenti a $C^\infty(\bar{A})$ — e soddisfacenti alle condizioni

$$a_{ik,jh}(x) = a_{jh,ik}(x) , \qquad a_{ik,jh}(x) = a_{ki,jh}(x) .$$

Inoltre, la forma quadratica

$$a_{ik,jh}(x)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jh}$$

nelle variabili ε_{ik} (con $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$), è strettamente positiva.

Sia $\sum$ un sottoinsieme di ∂A (che eventualmente coincide con ∂A) consistente in un insieme finito di superficie regolari aperte ad $(r-1)$ dimensioni e non sovrapponentisi.

Sia $\mathfrak{U}_\Sigma$ il sottoinsieme di H formato da tutte le funzioni v di H soddisfacenti su $\sum$ la condizione unilaterale

(6) $$v_i\, \nu_i \geq 0 \qquad (\nu \text{ normale interna}).$$

Questa condizione dev'essere intesa nel senso dello spazio H_1, che è isomorfo al nostro spazio H a causa delle ipotesi assunte su A.

Se A viene riguardato come la configurazione naturale di un corpo elastico e $\sum$ come una superficie priva di attrito, la condizione (6) significa che il corpo indeformato A giace su $\sum$ e non può passare sotto $\sum$ in alcuno dei suoi movimenti ammissibili.

Sia f una data funzione r-vettoriale, appartenente ad $L^2(A)$ e sia φ una data funzione r-vettoriale appartenente a $L^2(\sum^*)$ $\{\sum^* = \partial A - \sum\}$; f e φ determinano, rispettivamente, le forze di massa agenti su A e le forze superficiali agenti su $\sum^*$. La configurazione di equilibrio di A è quella che rende minimo nella classe $\mathfrak{U}_\Sigma$ il funzionale dell'energia (2), ove $B\,(u, v)$ è data da (5) e

$$F(v) = \int_A fv dx + \int_{\Sigma^*} \varphi v d\sigma .$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un minimo del funzionale $\mathfrak{I}(v)$ nell'insieme $V \equiv \mathfrak{U}_\Sigma$ porta al problema unilaterale (3).

Come sopra osservato, la difficoltà maggiore nell'affrontare questo problema consiste nel fatto che la forma bilineare (5) non è coercitiva sulla norma $\|v\|$ data da (4).

Sia R il nucleo della forma quadratica $B(v, v)$:

$$R \equiv \{\varrho\ ;\ B(\varrho, \varrho) = 0\}$$

e sia R_Σ l'intersezione di R con $\mathfrak{U}_\Sigma$

$$R_\Sigma = R \cap \mathfrak{U}_\Sigma .$$

Si vede facilmente che la condizione

(7) $$F(\varrho) \leq 0 \qquad \varrho \in R_\Sigma$$

è necessaria per l'esistenza di una soluzione del problema (3). In [3] è fatto vedere che se la (7) è soddisfatta in *senso forte* (cioè $F(\varrho) = 0$, $\varrho \in R_\Sigma$ implica $-\varrho \in R_\Sigma$), allora esiste una soluzione u del problema unilaterale (3) ed ogni altra soluzione è data da $u + \varrho$, ove ϱ è ogni vettore di R tale che $F(\varrho) = 0$, $u + \varrho \in \mathfrak{U}_\Sigma$.

Il fatto che la (7) sia soddisfatta in senso forte significa che dev'essere $F(\varrho) < 0$ per ogni $\varrho \in R_\Sigma$ irreversibile, cioè tale che $-\varrho \notin R_\Sigma$.

In [3] è fatto vedere inoltre che questa condizione forte non è solo sufficiente, ma anche — con opportune ipotesi per $\sum$ (per esempio quando $\sum$ è piana) — necessaria per l'esistenza di una soluzione (2).

Rimandiamo l'ascoltatore al lavoro [3] per i dettagli delle dimostrazioni. Tuttavia, desideriamo qui rilevare alcuni dei punti più significativi dell'aspetto analitico del problema di Signorini.

1) Si ponga

$$p_0(v) = \Big(\int_A |v|^2\, dx\Big)^{1/2}, \qquad p_1(v) = \Big(\int_A \varepsilon_{ik}(v)\varepsilon_{ik}(v) dx\Big)^{1/2},$$

allora

$$\|v\|^2 = [p_0(v)]^2 + [p_1(v)]^2 . \tag{8}$$

Lo spazio H è uno spazio pre-Hilbertiano (cioè uno spazio di Hilbert non necessariamente completo) rispetto alla norma $p_0(v)$; $p_1(v)$ è una semi-norma in H (cfr. [3], p. 100 e p. 109).

2) Lo spazio

$$R \equiv \{v;\ p_1(v)\} = 0$$

è di dimensione finita (cfr. [3], pp. 112-113).

3) Esiste una costante positiva c_0 tale che

$$\inf_{\varrho\in R} p_0(v-\varrho) \le c_0\, p_1(v)$$

(cfr. [3], p. 115).

4) Esiste una costante positiva c tale che

$$B\,(v, v) \ge c\,[p_1(v)]^2$$

(cfr. [3], p. 117).

5) La condizione (7) è soddisfatta in senso forte (cfr. [3], p. 117 e pp. 131-135).

Supponiamo ora che H sia uno spazio di Hilbert astratto e che la norma di H possa esser decomposta come indicato dalla (8) (cfr. [9], p. 504).

---

(2) Tale circostanza ha un ben preciso significato fisico, come è approfonditamente chiarito in [3].

Supponiamo inoltre che H sia uno spazio pre-hilbertiano rispetto a p_0 e che p_1 sia una semi-norma in H (cfr. [9]: (5.1) di p. 504). Si assuma che, data la forma bilineare limitata (non necessariamente simmetrica) $B(u, v)$, siano soddisfatte le condizioni 2), 3), 4) (cfr. [9]: (5.2), (5.3), (5.4) di p. 504). Si assuma che pure la 5) sia soddisfatta, nel senso che se $R \cap V \neq \{0\}$, valga la condizione forte

$$(7') \qquad F(\varrho) < 0 \quad \text{per} \quad \forall \varrho \in R \cap V, \quad \varrho \neq 0$$

(cfr. [9]: (5.5) di p. 504).

È stato fatto vedere (cfr. [9]: Teor. 5.1 di p. 504) che, sotto tali ipotesi, continuano a valere i risultati di [3], per modo che questi ultimi possono essere presentati come un caso molto particolare di un teorema generale astratto (cfr. [9], p. 511).

Sfortunatamente, l'imitazione che è stata fatta dei risultati di [3], in un assetto generale astratto, porta a risultati non soddisfacenti. Infatti, si deve rilevare che i risultati di [3] *si riferiscono ad un particolare insieme convesso*: l'insieme $\mathfrak{U}_\Sigma$, che ha la caratteristica di essere un *cono* (cioè $v \in \mathfrak{U}_\Sigma$ implica $tv \in \mathfrak{U}_\Sigma$ per $t > 0$). In una siffatta circostanza, le condizioni poste in [3] sono le migliori ottenibili, ma ci si deve attendere che, per un *insieme convesso generale*, le condizioni considerate per un cono non siano appropriate e si debbano trovare condizioni più sofisticate, che tengano conto della natura geometrica di V.

Infatti, se si applica il sopra menzionato teorema generale astratto a semplicissimi problemi unilaterali *non riferentisi ad un cono*, si ottengono risultati assai insoddisfacenti. Si consideri, come esempio, lo spazio bidimensionale dei vettori v a due componenti reali v_1, v_2. La condizione 1) è soddisfatta se si assume

$$\| v \|^2 = v_1^2 + v_2^2 ,$$

$$[p_0(v)]^2 = \frac{3}{4}(v_1^2 + v_2^2) - \frac{1}{2} v_1 v_2 , \quad [p_1(v)]^2 = \frac{1}{4}(v_1 + v_2)^2 .$$

Lo spazio R è determinato dalla condizione $v_1 + v_2 = 0$ ed è unidimensionale. Pertanto la condizione 2) è soddisfatta.

Si ha:

$$\inf_{\varrho \in R} [p_0(v - \varrho)]^2 = \frac{1}{4}(v_1 + v_2)^2 = [p_1(v)]^2 ,$$

che prova il sussistere della condizione 3).

Si assuma

$$B(u, v) = u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_2 v_2 ,$$

allora

$$B(v, v) = (v_1 + v_2)^2 = 4 [p_1(v)]^2 ,$$

il che prova la 4).

Si prenda come V l'insieme chiuso convesso, definito dalla condizione

$$0 \leq v_2 \leq 1$$

e si consideri il problema unilaterale (3), che in questo caso particolare diventa:

$$(9) \qquad u_1(v_1 - u_1) + u_1(v_2 - u_2) + u_2(v_1 - u_1) + u_2(v_2 - u_2) \geq \geq F_1(v_1 - u_1) + F_2(v_2 - u_2),$$

con F_1 ed F_2 numeri reali assegnati.

In accordo alla condizione (7′), questo problema ha una soluzione se

$$-F_1 \varrho + F_2 \varrho < 0$$

per ogni ϱ tale che $0 \leq \varrho \leq 1$. Ciò implica che esiste una soluzione se $F_2 - F_1 < 0$. Tuttavia il problema ha una soluzione per ogni scelta di F_1, F_2. Infatti, dalla (9), supponendo $v_1 > 0$ (supponendo $v_1 < 0$) e facendo $v_1 \to +\infty$ $(v_1 \to -\infty)$, otteniamo

$$u_1 + u_2 \geq F_1 \quad (u_1 + u_2 \leq F_1).$$

Quindi $u_1 + u_2 = F_1$. Dalla (9) si ottiene

$$(F_1 - F_2)(v_2 - u_2) \geq 0\,,$$

il che implica

$$u_2 \begin{cases} = 1 & \text{se} \quad F_1 - F_2 < 0\,, \\ \in [0,1] & \text{se} \quad F_1 - F_2 = 0\,, \\ = 0 & \text{se} \quad F_1 - F_2 > 0\,. \end{cases}$$

È banale verificare che i valori di u_1 ed u_2, che abbiamo trovato, soddisfano la (9).

Desidero riferire qui su risultati, relativi a problemi unilaterali in uno spazio di Hilbert per forme bilineari semi-coercitive, contenuti in una mia monografia pubblicata di recente sullo Handbuch der Physik [10]. Da quei risultati si vede chiaramente come la struttura geometrica del convesso V intervenga essenzialmente nello studio del problema e come il caso particolare di un cono sia ingannevole, se preso quale modello per il caso generale.

Indicheremo con (u, v) il prodotto scalare nello spazio di Hilbert H. Sia $B(u, v)$ una forma bilineare limitata definita su $H \times H$. *Si supponga in primo luogo che B sia simmetrico.* Sia T l'operatore lineare limitato definito dalla condizione $B(u, v) = (Tu, v)$. Sia $N(T)$ il nucleo dell'operatore T. Supponiamo che la forma quadratica $B(v, v)$ sia non negativa. Il sottospazio lineare $N(T)$ di H è pure il nucleo della forma quadratica $B(v, v)$, cioè

$$N(T) \equiv \{v;\ B(v, v) = 0\}\,.$$

Sia Q il proiettore ortogonale di H sul nucleo di $B(v, v)$ e si ponga $P = I - Q$ (I = operatore identico).

Faremo le seguenti ipotesi:

(I) *Ipotesi di semi-coercività*:

$$B(v, v) \geq c \| Pv \|^2 \quad \forall\, v \in H\,, \tag{10}$$

c è una costante positiva indipendente da v.

(II) *Il nucleo della forma quadratica* $B(v, v)$ *è di dimensione finita.*

Sia U un sottoinsieme arbitrario di H contenente qualche $u \neq 0$. Si consideri per ogni $u \in U$, $u \neq 0$, l'insieme dei numeri non negativi t tali che $t \| u \|^{-1} u \in U$. Indicheremo con $p(u, U)$ l'estremo superiore di questo insieme, cioè

$$p(u, U) = \sup \{ t\,;\ \ u \in U,\ \ u \neq 0,\ \ t \| u \|^{-1} u \in U \}\,.$$

Se u_0 è un punto di H, indicheremo con $U(u_0)$ l'insieme di tutti i punti u di H tale che $u + u_0 \in U$. Se T è una trasformazione da H in H ed U è un sottoinsieme di H, con $T[U]$ indicheremo l'immagine di U per la trasformazione T.

Sia $N(F)$ il nucleo del funzionale lineare limitato F, cioè

$$N(F) = \{ v\,;\ F(v) = 0 \}\,.$$

Si ponga

$$L = N(F) \cap N(T),\ N(T) = L \oplus L_1\,.$$

Sia $\tilde{Q}$ il proiettore ortogonale di H su L. Si ponga $\tilde{P} = I - \tilde{Q}$. Sia Q_1 il proiettore ortogonale di H su L_1.

Sussiste il seguente teorema:

TEOREMA 1. — *Il problema unilaterale* (3) *ha una soluzione se esiste* $u_0 \in V$ *tale che*

(i) $F(\varrho) < 0$ *per* $\varrho \in N(T) \cap V(u_0), p\{ Q_1\varrho, Q_1 [N(T) \cap V(u_0)] \} = +\infty$

(ii) *L'insieme* $\tilde{P}\,[V(u_0)]$ *è chiuso.*

Il teorema che segue prova che la condizione (i) del teorema 1 è necessaria.

TEOREMA 2. — *Se il problema* (3) *ha una soluzione, per ogni* $u_0 \in V$ *ed ogni* ϱ *tali che*

$$\varrho \in N(T) \cap V(u_0),\ p\{ Q_1\varrho, Q_1 [N(T) \cap V(u_0)] \} = +\infty,$$

si deve avere $F(\varrho) < 0$.

Nel lavoro [10] viene dato un esempio comprovante che se non sussiste la condizione (ii), il teorema 1 può non essere vero. In [10] è pure fatto vedere che il vettore Pu è univocamente determinato da (3), ed inoltre,

che se u è una soluzione di (3), ogni altra soluzione è data da $u + \varrho$, ove ϱ è ogni vettore di L tale che $u + \varrho \in V$.

L'analisi nel caso in cui B è non simmetrico è più complicata.

Si mantengano per $B(u, v)$, per V e per F le ipotesi già stabilite, ma non si supponga più che $B(u, v)$ sia simmetrica. Q è il proiettore ortogonale di H sul nucleo di $B(v, v)$ e si ponga, come prima, $P = I - Q$. Si supponga sussistere la (10) e sia soddisfatta l'ipotesi (II).

Se poniamo $B(u, v) = (Tu, v)$ ed indichiamo con T^* l'operatore aggiunto di T, il nucleo di $B(v, v)$ coincide con il nucleo $N(T + T^*)$ dell'operatore $T + T^*$ ed inoltre

$$N(T) \equiv N(T^*) \cap N(T + T^*) .$$

Indichiamo con $K(T)$ il complemento ortogonale di $N(T)$ rispetto a $N(T + T^*)$, cioè

$$N(T + T^*) = N(T) \oplus K(T).$$

Definiamo $N(F)$, L, L_1, $\tilde{Q}$, $\tilde{P}$, Q_1 come prima.

Il teorema seguente generalizza il teorema 1 ad una forma non simmetrica:

Teorema 3. — *Il problema unilaterale* (3) *per la forma bilineare (non necessariamente simmetrica)* $B(u, v)$ *ha una soluzione* u *se esiste un* $u_0 \in V$ *tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni*:

(i) $F(\varrho) < 0$ *per* $\varrho \in N(T) \cap V(u_0)$, $p\{Q_1\varrho, Q_1[N(T) \cap V(u_0)]\} = +\infty$.

(ii) *L'insieme* $\tilde{P}[V(u_0)]$ *è chiuso.*

(iii) *Sia* Q_0 *il proiettore ortogonale di* H *su* $K(T)$. *Per ogni* ϱ *che soddisfa le condizioni*

$$Q_0\varrho \neq 0, \ \varrho \in N(T + T^*) \cap V(u_0),$$

$$p\{(Q_0 + Q_1)\varrho, \ (Q_0 + Q_1)[N(T + T^*) \cap V(u_0)]\} = +\infty,$$

esiste un vettore $v_\varrho \in V$ *tale che*

$$F(\varrho) + B(\varrho, v_\varrho) < 0 .$$

Come nel caso simmetrico, è possibile stabilire un teorema che prova la necessità della condizione (i). Risultati analoghi abbiamo per le condizioni (ii) ed (iii).

Per le dimostrazioni dei teoremi enunciati nella presente conferenza, rimandiamo alla monografia [10] e così pure per le applicazioni ad una vasta classe di problemi unilaterali che interessano la Statica dei sistemi continui.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, Atti Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze (1933).

[2] A. Signorini, *Questioni di elasticità non linearizzata o semilinearizzata*, Rend. di Matem. e delle sue appl. 18 (1959).

[3] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, 7, fasc. 5 (1964).

[4] G. Fichera, *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, 34 (1963).

[5] G. Fichera, *The Signorini elastostatics problem with ambiguous boundary conditions*, Proc. of the Internat. Symp. « Applications of the theory of functions in continuum mechanics », vol. 1, Tbilisi, Sept. 1963.

[6] G. Fichera, *Un teorema generale di semicontinuità per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisica-matematica*, Atti del Convegno Lagrangiano, Acc. Sci. Torino (1963).

[7] G. Stampacchia, *Variational inequalities*, in « Theory and applications of monotone operators », edit. by A. Ghizzetti, Proc. of a NATO Advanced Study Institute, Venice (1968). Publ. Oderisi, Gubbio (1969).

[8] G. Stampacchia, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, Compt. Rend. 258 (1964).

[9] J. L. Lions-G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967).

[10] G. Fichera, *Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints*, Handbuch der Physik, Bd. VI*a*/2, Springer Verlag (1972).

W. T. KOITER (*) and M. PIGNATARO (**)

A general theory for the interaction between local and overall buckling of stiffened panels (***).

Summary. — *The present analysis deals with the interaction between local and overall elastic buckling of stiffened panels consisting of a flat plate and stiffeners built up from flat plate strips. Previous work on the post-buckling behaviour of long flat plate strips is reviewed and employed to write reasonably simple and still sufficiently accurate expressions for the displacements in the initial post-buckling range. The concept of slowly varying functions is employed in the derivation of a relatively simple approximate energy expression which governs combined local and overall buckling of the panel. In addition to the ratio of the critical stresses for overall and local buckling* $\lambda_E = \sigma_E/\sigma_{cr}$, *the energy expression depends essentially on only one further nondimensional parameter. Moreover, the latter parameter depends only on properties of the cross-section, and it does not appear to vary widely for well-designed panels likely to be encountered in practice. The nonlinear interaction between overall and local buckling for stiffencd panels proves to be far less severe than for van der Neut's idealized built-up column, consisting of two flanges* [16]. *As noted by Tvergaard* [19], *the stiffened panel is still extremely sensitive to very small imperfections, but it has since been established that this imperfection sensitivity is very much reduced for imperfection magnitudes likely to occur in practice* [12]. *The maximum reduction in critical stress due to mode interaction and the presence of imperfections need not exceed about 10 percent in well-designed panels.*

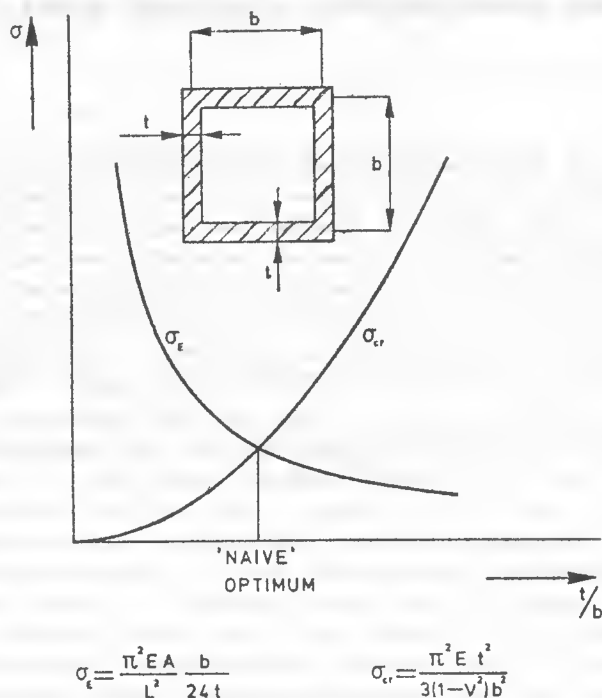
(*) Delft University of Technology. Premio Panetti 1971.
(**) Università degli studi di Roma.

(***) The present paper is the final report on a joint investigation carried out during the second author's NATO research fellowship at Delft University of Technology in the academic year 1972-73. A first report was presented at the IUTAM Symposium on Buckling of Structures at Harvard University in June 1974 [cf. the Proceedings, Springer Verlag (1976), pp. 133-148]. The generalisation in the present report was developed by the first author who also bears full responsibility for this presentation.

1. — Introduction.

The optimum design of a structure liable to failure by buckling in several (linearly, independent modes is often believed to require an attempt at equalizing the critical stresses for the individual buckling modes. The optimum design in this sense of a compression strut with a square tubular cross-section is obtained at the intersection of the two curves in fig. 1.

Experience with the explosive and erratic buckling phenomenon exhibited by many shell structures, and the associated imperfection-sensitivity of these structures, have led us to question the "naive" approach to optimum design above [9]. Nonlinear interaction between linearly independent simultaneous or nearly simultaneous buckling modes is responsible for the atrocious behaviour of the shell structures in question, and we should be prepared to face similar disastrous consequences in other structures where the optimum design leads to multi-mode buckling.



$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E A}{L^2}\frac{b}{24t} \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E t^2}{3(1-\nu^2)b^2}$$

Fig. 1 – Thin-walled square column.

The first detailed investigations of the nonlinear interaction between overall and local buckling of a column built up from flat plate strips are due to van der Neut [16] and to Graves Smith [4]. The latter author deals with the square tube of fig. 1, and the nonlinear interaction appears to be of minor importance in the elastic range in this case. The reason

for this mild behaviour is to be found in the symmetry of the local buckling mode with respect to the horizontal and vertical centroidal axes of the cross-section (cf. section 13). On the other hand, van der Neut's model column (fig. 2), whose two plate flanges are capable of independent

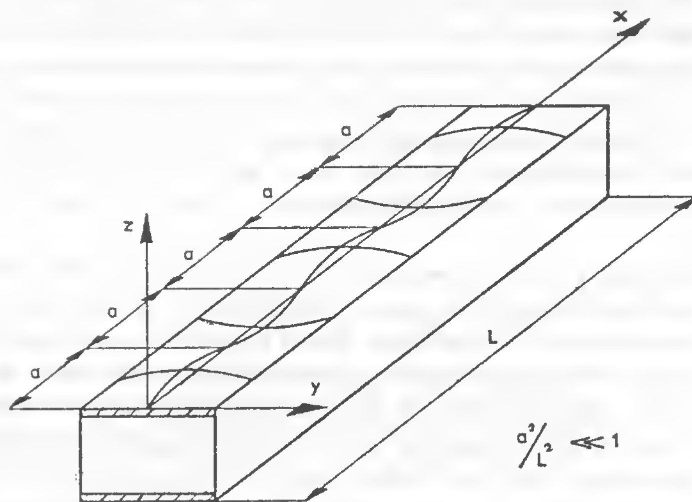


Fig. 2 – Van der Neut's built-up column.

local buckling, exhibits a rather strong nonlinear interaction with overall buckling. This results in a marked sensitivity to imperfections, either or both of the column axis or the plate flanges, in particular for designs close to the "naive" optimum.

In his analysis van der Neut first establishes the stiffness properties of the flanges in the post-buckling range. These properties are then applied to the investigation of possible column buckling. An advantage of this approach is its perspicuity, but a disadvantage is the need of numerical values in the second stage of the analysis. Moreover, this method is not so easily applied to more realistic configurations representative for stiffened panels. A basic difficulty is here the interaction between the various plate strips for local buckling in the post-buckling range. In van der Neut's later analysis of a stiffened panel with top hat stiffeners [15] it was therefore necessary to introduce additional approximations whose accuracy it is difficult to assess.

In an earlier report [10] we have considered van der Neut's two-flange model column by a different approach, the general nonlinear theory of elastic stability [5], [6] where the several buckling modes are dealt with on an equal footing. This approach may be less transparent in a physical sense, but it has considerable advantages in the analysis. For example,

one of the results is a *closed* formula for the sensitivity to equal local imperfections in both flanges.

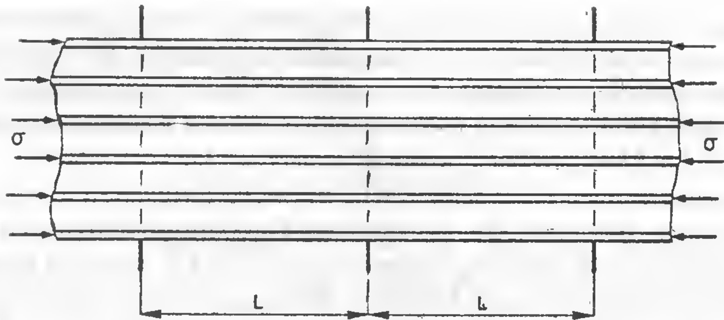
The first detailed investigation of interaction in a stiffened panel with integral stiffeners was made by Tvergaard [19], again by the general nonlinear theory [5],[6]. His analysis, however, is restricted to the asymptotic case where all deflections are assumed to be so small that all quartic terms in the energy expression can be ignored in the presence of a cubic term, and this happens to be the case for coincident critical stresses, the case of the "naive" optimum. Although this asymptotic approach is indeed valid for sufficiently small imperfections, it leads to a serious over-estimate of the imperfection-sensitivity for imperfections of a magnitude likely to occur in practice.

In a previous paper [12] we have considered panels of the Tvergaard type by a method similar to the one employed in [10]. In particular we have examined the behaviour of multi-bay panels which are more representative for actual structures than single-bay panels. One of the most significant results was that the behaviour of the panel depends only on two nondimensional parameters, the ratio of the critical stresses for overall and local buckling $\lambda_E = \sigma_E/\sigma_{cr}$, and one further parameter. Moreover, the additional parameter depends only on properties of the cross-section, and it does not vary widely for well-designed panels of the Tvergaard type. A further significant result was a closed formula for the sensitivity to local imperfections. This formula confirms Tvergaard's result of an extreme imperfection sensitivity for very small imperfections at $\lambda_E = 1$. Equally or even more important, however, is the prediction that the reduction of the actual critical stress in the presence of larger local imperfections will not exceed 11 percent for Tvergaard's panel at $\lambda_E = 1$.

In the discussion of [12] at the Harvard IUTAM Symposium we have already observed that the approach employed would be applicable to a wide variety of panel configurations. It is the purpose of the present report to substantiate this claim by a more general analysis.

The general lay-out of an (integrally) stiffened panel is sketched in fig. 3. The panel is supported by transverse ribs at a regular spacing L. The transverse spacing of the stiffeners b is small in comparison with L, and the same property then holds true for the half-wave length a of the local buckling mode. Various stiffener configurations, integral stiffeners, welded bulb stiffeners and bonded Z-stiffeners or top hat stiffeners are sketched in fig. 4.

It seems convenient first to review briefly a number of results for the post-buckling behaviour of long flat plate strips under various longitudinal boundary conditions (section 2). This review is particularly helpful because it permits an estimate of the accuracy to be obtained from simple upper



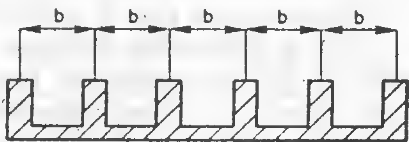


Fig. 3 – Lay-out of integrally stiffened panel.









Fig. 4 – Various panel configurations.

and lower bounds for the post-buckling stiffness. Some general properties of the local buckling modes are discussed in section 3 at the hands of fig. 5. The post-buckling stiffness of a complete panel cross-section, both in compression and in bending, is discussed in section 4. Some simple properties of overall buckling are next reviewed in section 5.

In section 6 we come to grips with our actual problem in the calculation of the energy increment due to buckling. The basic parameter, in addition to the critical stress ratio λ_E, is given by (6.17) in the case of a lower bound approximation to the post-buckling stiffness, and by (6.19) in a more accurate approximation. The introduction of nondimensional quantities leads to a relatively simple nondimensional energy functional in section 7. The discussion of the stability of the pre-buckling state leads in section 8 to the stability boundary with the significant property that a part of this boundary is strictly neutral, a second part is unstable, and a third part is stable (fig. 6). The various post-buckling solutions for a perfect panel are discussed in section 9, and the results for the Tvergaard panel are depicted in fig. 7. The influence of local imperfections is analyzed in section 10, and the results are presented in figures 8 and 9, again for the Tvergaard panel. The effect of column axis imperfections is discussed in section 11. A typical aircraft wing panel (fig. 10), discussed by van der Neut [15], is considered as an example in section 12. It appears here that it is unnecessary to evaluate the more accurate expression B^* (6.19) because the value of B^2, an upper bound for this quantity, is already sufficiently small, viz. $B^2 = 0.12$. The largest possible reduction of the actual buckling stress of an imperfect panel is here always less than 8 percent. Some limitations of the present theory are discussed in section 13, and they suggest some further research in our concluding remarks.

2. — Review of some results for the initial post-buckling behaviour of flat plates.

The post-buckling behaviour of rectangular plates under uni-axial longitudinal compression has been investigated by many authors. We refer to [8] for a survey of the literature. An exact solution for the initial post-buckling stiffness of simply-supported plates was achieved by Marguerre and Trefftz [13]. Their method of analysis was extended by Benthem for applications to any combination of plate strips as occur in stiffened panels [1]. Considerable labour is involved in this exact analysis. On the basis of experience gained more than thirty years ago in the more difficult problem for the advanced stages of post-buckling behaviour [7] we prefer simpler approximate solutions whose accuracy is entirely adequate for all practical purposes.

A prerequisite for all post-buckling calculations is a knowledge of the buckling mode according to linear analysis. In the case of longitudinal compression of long rectangular plates this buckling mode may always be described by means of a normal deflection

$$w(x, y) = fg(y) \sin (\pi x/a) , \tag{2.1}$$

where x and y are longitudinal and transverse Cartesian coordinates in the plane of the plate, a is the axial half-wave length, $g(y)$ describes the transverse wave profile (normalized in a suitable way), and f is a constant amplitude factor which remains indeterminate in the linear buckling analysis. Whenever the exact transverse wave profile is unknown or unmanageable, we may employ a suitable approximate expression for the function $g(y)$. Taking the x-axis along the center line of the plate, the exact profile is $g(y) = \cos (\pi y/2b)$ in the case of simply-supported longitudinal edges, and the longitudinal half-wave is $a = b$ in this case, where b denotes the plate width. An excellent approximation in the case of clamped longitudinal edges is $g(y) = [1 - 4(y/b)^2]^2$, far more convenient than the exact expression involving both trigonometric and hyperbolic functions. The associated longitudinal half-wave length of the buckling mode is $a = 0.663b$ in this case. The accuracy of the approximation may be assessed by the error of the critical stress resulting from the approximate analysis, viz. an overestimate by 0.2 percent.

The initial post-buckling behaviour is characterized by a gradual increase of the amplitude factor f from its value zero at the critical stress σ_{cr}. To a first approximation the buckling mode *shape* (2.1) does not change, but the normal deflection is now accompained by longitudinal and transverse in-plane displacements $u(x, y)$ and $v(x, y)$, as well as by additional membrane stresses σ_x, σ_y, τ_{xy}.

The simplest approximation of the initial post-buckling range is obtained in the form of a *lower bound* for the post-buckling stiffness. In this lower bound approach we ignore the post-buckling membrane stress components σ_y and τ_{xy}. The membrane energy density is then given by $\frac{1}{2}E\gamma_{xx}^2$, where E is Young's modulus and γ_{xx} is the axial direct strain component

$$\gamma_{xx} = u_{,x} + \tfrac{1}{2}w_{,x}^2 . \tag{2.2}$$

A subscript x preceded by a comma denotes here as usual partial differentiation with respect to the coordinate x. Minimizing the elastic membrane energy with respect to the axial displacement component u, the result is that γ_{xx} must be independent of x. The requirement that the transverse plate edges must remain straight and parallel, normal to the longitudinal direction, now leads to the result

$$u(x, y) = -\Delta\varepsilon x - \frac{\pi}{8a} f^2 g^2(y) \sin(2\pi x/a) , \tag{2.3}$$

where $\Delta\varepsilon$ is the (additional) unit overall shortening due to buckling. The associated strain component (2.2) is now

$$\gamma_{xx} = -\Delta\varepsilon + \frac{\pi^2 f^2}{4a^2} g^2(y) . \tag{2.4}$$

We continue our energy considerations in order to obtain the equilibrium values of $\Delta\varepsilon$ and f. Starting from the flat fundamental state at a uniform compressive stress σ, the release of membrane energy due to a buckling deflection $w(x, y)$ is $\frac{1}{2}\sigma w_{,x}^2$ per unit volume. This energy release is available to provide the flexural energy required in bending of the plate. At the critical stress σ_{cr} the total release of membrane energy is just adequate to provide the total required flexural energy in the buckling mode (2.1). It follows that the flexural energy in the buckling mode (2.1), averaged per unit volume of the plate, is given by

$$\frac{1}{bl} \iint \tfrac{1}{2}\sigma_{cr} \frac{\pi^2 f^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} g^2(y) dx dy = \sigma_{cr} \frac{\pi^2 f^2}{4a^2} \overline{g^2} , \tag{2.5}$$

where l is the total plate length, and the bar over g^2 denotes the *average* value of $g^2(y)$ over the cross-section

$$\overline{g^2} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} g^2(y) dy . \tag{2.6}$$

The total increment in potential energy in the transition from the flat fundamental state at a uniform compressive stress σ is now obtained as the sum of three terms. First of all, we have the release of membrane energy at the actual value σ of the compressive stress in the fundamental state, a negative contribution $-\frac{1}{2}\sigma w_{,x}^2$ per unit volume. We shall take the *average value* of all energy contributions per unit volume of the plate, and this first contribution is evaluated at

$$-\sigma \frac{\pi^2 f^2}{4a^2} \overline{g^2} . \tag{2.7}$$

Secondly, we have the flexural energy contribution (2.5). Finally, in our *lower bound* approximation we have the additional energy contribution $\frac{1}{2}E\gamma_{xx}^2$ per unit volume, where γ_{xx} is given by (2.4). Its average value per unit volume is

$$\tfrac{1}{2}E \left[(\Delta\varepsilon)^2 - \Delta\varepsilon \frac{\pi^2 f^2}{2a^2} \overline{g^2} + \frac{\pi^4 f}{16a^4} \overline{g^4} \right] , \tag{2.8}$$

where the bar over g^4 again denotes the *average* value of $g^4(y)$ over the cross-scction

$$\overline{g^4} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} g^4(y) dy\,. \tag{2.9}$$

Our final energy expression, the average value per unit volume of the plate, is now

$$\tfrac{1}{2}E\left[(\Delta\varepsilon)^2 - \Delta\varepsilon\,\frac{\pi^2 f^2}{2a^2}\,\overline{g^2} + \frac{\pi^4 f^4}{16a^4}\,\overline{g^4}\right] + (\sigma_{cr} - \sigma)\,\frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\,\overline{g^2}\,. \tag{2.10}$$

Minimizing the energy expression (2.10) with respect to $\Delta\varepsilon$ and $\dfrac{\pi^2 f^2}{4a^2}$, we obtain the equilibrium values

$$\frac{\pi^2 f^2}{4a^2} = \frac{\sigma - \sigma_{cr}}{E}\;\frac{\overline{g^2}}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2}\,, \tag{2.11}$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{cr}}{E}\;\frac{(\overline{g^2})^2}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2}\,. \tag{2.12}$$

The result (2.12) is conveniently translated into the *lower bound* for the "effcctive tangent modulus" $E^* = \eta E$ in the initial post-buckling range. The total unit overall shortening of the plate is $\varepsilon = \sigma/E + \Delta\varepsilon$, and the tangent modulus is definied by $E^* = d\sigma/d\varepsilon$. We obtain the result

$$\eta = \frac{E^*}{E} = 1 - \frac{(\overline{g^2})^2}{\overline{g^4}}\,. \tag{2.13}$$

We note the inequalities $0 < \eta < 1$, the second one of which is obvious from (2.13). The first inequality is easily verified by means of the inequality of Cauchy, Schwarz and Bunjakowski applied to the functions $g^2(y)$ and unity in the interval $-\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b$. This also confirms the well-known result that our solution (2.11) is real, if and only if $\sigma \geqq \sigma_{cr}$.

Our *lower bound* approach for the post-buckling stiffness of plate strips implies in its application to the interaction between local and overall buckling of stiffened panels a (safe) *overestimate of the possible adverse effects* of such interaction. Obviously there is little need of a refinement of the analysis whenever this overestimate leads already to interactions of minor significance. Such a refinement will only be required where the interaction appears to be significant.

In the cases of simply-supported or clamped longitudinal edges which are moreover restrained in the plane of the plate by the requirement that these edges have to remain *straight*, also in the plane of the plate, the

analysis in [7] provides an (accurate) *upper bound* for the post-buckling stiffness. In this more accurate analysis the assumptions on the membrane stresses σ_y and τ_{xy} in the post-buckling range are dropped. Assumption (2.3) is now supplemented instead by an additional assumption for the transverse in-plane post-buckling displacement

$$v(x, y) = \nu \Delta\varepsilon y - \frac{1}{4} f^2 \int_0^y \left[\dot{g}^2(y) + \nu \frac{\pi^2}{a^2} g^2(y) \right] dy + \\ + \frac{1}{8} f^2 g(y) \dot{g}(y) \cos(2\pi x/a), \qquad (2.14)$$

where a dot denotes differentiation with respect to the coordinate y. The result of the fairly lengthy calculations in [7] may be expressed in the form that the energy expression (2.10), averaged per unit volume of the plate, is *augmented* by

$$\frac{E}{256(1-\nu^2)} f^4 \overline{(\dot{g}^2 - g\ddot{g})^2} = \\ = \frac{E}{256(1-\nu^2)} f^4 \frac{1}{b} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} [\dot{g}^2(y) - g(y)\ddot{g}(y)]^2 \, dy. \qquad (2.15)$$

The corresponding modification of equations (2.11)–(2.13) consists simply of a *replacement* of $\overline{g^4}$ by $\overline{g_*^4}$, defined by

$$\overline{g_*^4} = \overline{g^4} + \frac{a^4}{8\pi^4(1-\nu^2)} \overline{(\dot{g}^2 - g\ddot{g})^2}. \qquad (2.16)$$

An attractive feature of the presentation of post-buckling results in the present form, which appears to be new, is that the numerical evaluation is quite simple and straightforward, once the transverse wave profile $g(y)$ and the longitudinal half-wave length of the (linear) buckling mode are available, either exactly or to an adequate approximation.

Some numerical results are presented in table I. The blank spots represent cases where no numerical data are available and where an additional effort to obtain such data was not considered worthwhile. For example, the lower bound 1/3 and the well-known exact value 0.408 in the second row obviate the need of an upper bound. Likewise, in the fourth row we know a priori that the exact value of η must be less than the value 0.497 in the third row, and the lower bound 0.449 allows us an estimate of the exact value at 0.47 ± 0.02.

The upper bound and exact value 6/11 in the fifth row have obtained from a special analysis of the torsional post-buckling behaviour of a

TABLE I.

Effective tangent modulus $E^* = \eta E$ in intitial post-buckling range for long flat plate strips; values of σ_{cr} and η.

Longitudinal edge conds.	σ_{cr}	η		
		Lower bound	Upper bound	Exact value
Simply-supported, straight edges	$\frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$	$\frac{1}{3}$	0.512	$\frac{1}{2}$
Simply-supported edges, no in-plane edge tractions	$\frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$	$\frac{1}{3}$	—	0.408
Clamped, straight edges	$1.7425 \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$	0.449	0.505	0.497
Clamped edges, no in-plane edge tractions	$1.7425 \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$	0.449	—	—
One simply-supported straight edge and one free edge	$G \frac{h^2}{b^2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{11}$
One simply-supported edge without in-plane edge tractions and one free edge	$G \frac{h^2}{b^2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{4}{9}$

column with a thin-walled cruciform cross-section (to be published elsewhere). Such a special analysis was needed in this case because an upper bound analysis of the type described by (2.14) to (2.16) would not apply with adequate accuracy in the case of a long axial half-wave length a. Finally, the lower bound and exact value 4/9 in the last row are an immediate consequence of (2.13) for the linear profile $g(y) = y + b/2$. We omit the proof that the upper bound 6/11 in the fifth row and the lower bound 4/9 in the last row do indeed also represent the exact values for infinitely long strips.

3. — Local buckling of a stiffened panel.

We shall consider panels, consisting of a flat plate and stiffeners whose cross-sections are composed of flat plate strips, possibly with a bulb at the free end of a flange. Several possibilities of stiffener cross-sections are sketched in fig. 5. We assume that the individual strips are

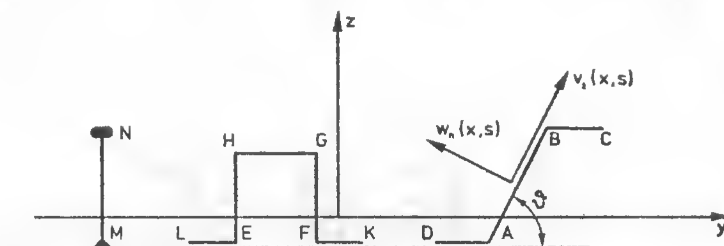


Fig. 5 – Various types of stiffeners.

so wide that the normal deflections in the local buckling mode of linear buckling theory may be put equal to zero at intersections of two plate strips which do not lie in the same plane. Examples of such corners in fig. 5 are A, B, E, F, G, H, M. We also assume that the plate strips at these intersections are rigidly connected, thus enforcing equal rotations of the strips meeting at such an intersection.

A general theory of the local instability of compression members built up from flat plates was developed by van der Neut more than twenty years ago [18]. Further developments of this theory are due to Wittrick; we refer to [20] for additional references. Henceforward we shall assume that the *results of the linear local buckling analysis are available* in the form of the critical stress σ_{cr} for local buckling in uniform axial compression, the associated longitudinal half-wave length a, and the shape of the transverse wave profile $g(s)$. The coordinate s in a strip identifies a generic point, and it replaces the coordinate y for a single plate. It will be convenient to take the origin individually in each strip at its center. The normal deflection $w_n(x, s)$ of the local buckling mode is thus described by

$$w_n(x, s) = fg(s) \sin (\pi x/a), \tag{3.1}$$

where f is again the indeterminate amplitude factor of linear buckling theory.

Our description of the normal deflection (3.1) implies that we assume that the buckling mode at the axial half-wave length a is a *simple* mode. Multiple local buckling modes at the same axial wave length would require a description in the form

$$w_n(x, s) = \sum f_k g_k(s) \sin (\pi x/a) \tag{3.2}$$

with a number of indeterminate amplitude factors equal to the number of linearly independent local buckling modes. Without any loss in generality we may require that the modes $g_k(s)$ are mutually orthogonal, a requirement expressed by the equations

$$\int f_k(s)\, f_e(s) dA = 0 \quad \text{for} \quad k \neq e, \tag{3.3}$$

where the integration is carried out over the entire cross-section of the panel. In the sequel we shall assume first that the buckling mode (3.1) is indeed a *single critical mode*. More specifically, we shall assume that the next higher mode at the same axial half-wave length a occurs at a critical stress value σ_{cr} which is significantly larger than the critical stress σ_{cr} for the actual single mode (3.1). This assumption is often verified in practice, but there are cases where a more general description of local buckling in the from (3.2) is needed. We shall return to this aspect later.

4. — Stiffness of a locally buckled panel.

Lower bounds for the initial post-buckling stiffness of a locally buckled panel are obtained equally easily as in the case of a single plate in section 2. In this lower bound analysis we ignore again the transverse normal and shear membrane stresses, here denoted by σ_s and τ_{xs}, and we assume the additional displacement $u(x, s)$ from the unbuckled fundamental state at a uniform compressive stress σ in the form

$$u(x, s) = -\Delta\varepsilon x - \varkappa z x - \frac{\pi}{8a} f^2 g^2(s) \sin (2\pi x/a). \tag{4.1}$$

In this expression $\Delta\varepsilon$ is the (additional) unit overall shortening of the panel, and $\varkappa$ is a prescribed small curvature of the panel with respect to the horizontal centroidal axis in fig. 5.

The (additional) direct strain component γ_{xx} due to buckling and curvature is now easily evaluated from (3.1) and (4.1)

$$\gamma_{xx} = -\Delta\varepsilon - \varkappa z + \frac{\pi^2 f^2}{4a^2} g^2(s). \tag{4.2}$$

The *increment in the potential energy* in the transition from the fundamental state to the buckled and curved configuration is again *averaged per unit volume of the panel.* We obtain an expression similar to (2.10)

$$\frac{1}{2} E\left[(\varDelta\varepsilon)^2 + i^2\varkappa^2 - \varDelta\varepsilon\,\frac{\pi^2 f^2}{2a^2}\,\overline{g^2} - \varkappa\,\frac{\pi^2 f^2}{2a^2}\,\overline{(zg^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^4 f^4}{16a^4}\,\overline{g^4}\right] + (\sigma_{cr} - \sigma)\,\frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\,\overline{g^2}, \tag{4.3}$$

where i is the radius of gyration of the panel cross-section with respect to the horizontal centroidal axis in fig. 5, and bars now denote *average values over the cross-section*

$$\left.\begin{aligned} \overline{g^2} &= \frac{1}{A}\int g^2(s)dA\,, \\ \overline{(zg^2)} &= \frac{1}{A}\int z(s)g^2(s)dA\,, \\ \overline{g^4} &= \frac{1}{A}\int g^4(s)dA\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

The post-buckling equilibrium configuration is obtained by equating to zero the partial derivatives of the energy increment with respect to the free parameters $\varDelta\varepsilon$ and $\pi^2 f^2/4a^2$. The bending moment M in the entire cross-section with respect to the horizontal centroidal axis follows from the partial derivative with respect to the curvature parameter $\varkappa$. We obtain the equations

$$\varDelta\varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\,\overline{g^2} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\,\overline{g^4} - \varDelta\varepsilon\overline{g^2} - \varkappa\overline{(zg^2)} + \frac{\sigma_{cr} - \sigma}{E}\,\overline{g^2} = 0, \tag{4.6}$$

$$M = EA\left[i^2\varkappa - \frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\,\overline{(zg^2)}\right]. \tag{4.7}$$

In the absence of a curvature ($\varkappa = 0$) we obtain a result corresponding to (2.12) for a single plate. The associated *lower bound* for the *tangent modulus in compression* is $E_c^* = \eta_c E$, where

$$\eta_c = 1 - \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4}}\,. \tag{4.8}$$

The corresponding value of the bending moment is

$$M = -EA\frac{\pi^2 f^2}{4a^2}\overline{(zg^2)} = -(\sigma - \sigma_{cr})A\frac{\overline{(g^2)}\,\overline{(zg^2)}}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}. \tag{4.9}$$

Such a case of " pure " compression occurs (approximately) in the conventional panel compression tests between two parallel, smooth and rigid stamps. The associated bending moment (4.9) implies an excentricity Δe of the compressive force in the post-buckling range, positive for an upward movement of the center of the normal force in figure 5

$$\Delta e = -\left(1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma}\right)\frac{\overline{(g^2)}\,\overline{(zg^2)}}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}. \tag{4.10}$$

The flexural rigidity of the panel in the initial post-buckling range is also obtained quite easily from (4.5)–(4.7). We find

$$\frac{\partial M}{\partial \varkappa} = EA\left[i^2 - \frac{\overline{(zg^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\right]. \tag{4.11}$$

This result is expressed conveniently in terms of a *tangentmodulus for bending* $E_b^* = \eta_b E$, where η_b is given by

$$\eta_b = \frac{1}{EAi^2}\frac{\partial M}{\partial \varkappa} = 1 - \frac{\overline{(zg^2)}^2}{i^2[\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2]}, \tag{4.12}$$

which again represents a *lower bound.*

The longitudinal edges of the plate strips forming the stiffeners are virtually free to undergo transverse in-plane displacements, with the exception of flanges which are cemented to the plate of the panel (see fig. 5). The lower bound for the post-buckling stiffness of these plate strips therefore represents a good approximation (cf. table I, rows 2 and 6).

On the other hand, the strips which form a subdivision of the plate itself (e.g. ML, LE, EF, FK, KD, DA in fig. 5) are not free at their edges to undergo transverse in-plane displacements. It may therefore be worthwhile to supplement the lower bounds for the reduction factors, η_c for compression and η_b for bending, by a more accurate approximation employing (accurate) upper bounds for the post-buckling stiffness of the plate itself. It follows from an analysis similar to the analysis in section 2 that the *more accurate* modified values of the quantities (4.8), (4.10) and (4.12) are given by

$$\eta_c^* = 1 - \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g_*^4}}, \tag{4.13}$$

$$\Delta e^* = -\left(1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma}\right) \frac{(\overline{g^2})\,(\overline{zg^2})}{\overline{g^4_*} - (\overline{g^2})^2}, \tag{4.14}$$

$$\eta_b^* = 1 - \frac{(\overline{zg^2})^2}{i^2[\overline{g^4_*} - (\overline{g^2})^2]}, \tag{4.15}$$

where the modified quantity g^4_* is defined by [cf (2.16)]

$$\overline{g^4_*} = \frac{1}{A}\left[\int g^4(s)dA + \frac{a^4}{8\pi^4(1-\nu^2)} \int_{(\text{plate})} \{\dot{g}^2(s) - g(s)\,\ddot{g}(s)\}^2 dA\right]. \tag{4.16}$$

The first integral is evaluated over the entire area A of the cross-section, the second integral is confined to the plate area, possibly including stiffener flanges cemented to the plate.

From a physical point of view it is again obvious, like in section 2, that even the lower bounds for η_c (4.8) and for η_b (4.12) must be positive numbers less than unity. This is indeed easily confirmed by applications of the inequality of Cauchy, Schwarz and Bunjakowski, to the functions $g^2(s)$ and unity in the case of η_c, and to the functions $[g^2(s) - \overline{g^2}(s)]$ and $z(s)$ in the case of η_b.

The reduction factors η_c and η_b, both less than unity, are responsible for a possibly adverse interaction between local buckling and overall column buckling of the panel. These effects cannot be expected to be very serious, if both reduction factors happen to be still fairly close to unity. It will appear from the analysis in sections 8-11 that the interaction is governed *primarily by the bending reduction factor* η_b. No disastrous interaction between local buckling and column buckling is to be feared, in general, if η_b happens to be not less than 0.85-0.9, *provided that the compression reduction factor is not much smaller*. The exception occurs in its most extreme form in symmetric cross-sections like the square thin-walled box of fig. 1. As a consequence of the symmetry of the critical local buckling mode with respect to the y-axis, we have here $\eta_b = 1$, whereas $\eta_c = 0.408$ by table I. In such cases the analysis has to be refined by proper allowance for the participation of the next critical local mode at $\sigma_{cr2} > \sigma_{cr}$ in the post-buckling range. Such an extended analysis is a fortiori required in the case of a double or multiple local buckling mode at the critical stress σ_{cr}. Van der Neut's column model [16] is a typical example, and we refer to [10] for its analysis along similar lines as in the present report.

5. — Overall buckling.

In overall buckling of a stiffened panel we ignore transverse bending of the plate strips and shear lag, as well as transverse direct stresses. These

assumptions are adequate for most types of stiffened panels in aeronautical applications as well as in modern steel bridge structures of the box-girder type. The overall buckling mode and its associated critical stress are thus given by the Euler formulae

$$W(x) = F \sin \frac{\pi x}{L}, \qquad \sigma_E = \frac{\pi^2 E i^2}{L^2}, \tag{5.1}$$

where i is the radius of gyration of the panel cross-section, and L is the length of a simply-supported single-bay panel or the distance between two consecutive, regularly spaced transverse ribs or bulkheads in the case of a multi-bay panel.

The approximation involved by the ignoration of the usually present support of longitudinal edges of the panel is normally of little consequence, in view of the very much larger flexural rigidity of the panel cross-section in comparison with the flexural rigidity of the plate. Likewise the effect of shear lag is of minor significance in conventional panel configurations. Finally, transverse direct stresses in the plate are insignificant in panels whose total width does not exceed the bay length. Nevertheless, all these secondary effects may be taken into account, if necessary. We shall not do so in the present report because they have little, if any significance for our primary objective, the interaction between overall buckling and local buckling of the panel.

6. — Combined buckling modes.

In our analysis of the interaction problem we cannot simply add the displacement fields of local and overall buckling. A first reason is that the amplitude factor f of the local mode will no longer be a constant, but it will become a function $f(x)$ of the axial coordinate x. Likewise the column mode need not remain sinusoidal, but it will become a function $W(x)$. We may expect, however, that the shape of the latter function is described *approximately* by the sine curve $\sin(\pi x/L)$, where L is the bay length between consecutive supporting transverse ribs or bulkheads. Since the occurrence of the function $f(x)$ is due to interaction with the overall mode, we may expect it to be of a similar longitudinal variation, expressed by the estimates

$$\begin{aligned} \int f'^2(x)dx &< C\frac{\pi^2}{L^2}\int f^2(x)dx, \\ \int f''^2(x)dx &< C\frac{\pi^4}{L^4}\int f^2(x)dx, \end{aligned} \tag{6.1}$$

where C is a number of order of magnitude *unity*, and primes denote differentiations with respect to x. Such functions which satisfy the estimates (6.1) will be called *"slowly varying"* functions [10].

The assumption of a slowly varying function $f(x)$ leads to considerable simplifications in our (approximate) analysis. For example, in the evaluation of integral of type

$$\int \left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2 dx = g^2(s) \int \left[\frac{\pi}{a} f(x) \cos \frac{\pi x}{a} + f'(x) \sin \frac{\pi x}{a}\right]^2 dx \tag{6.2}$$

over a length equal to a multiple of L, the result is

$$\frac{\pi^2}{2a^2}\, g^2(s) \int f^2(x) dx \left[1 + 0\left(\frac{a^2}{L^2}\right)\right]. \tag{6.3}$$

Since a/L is always small in comparison with unity, we may neglect contributions of order a^2/L^2 times the dominant term. The effect of our assumptions of slowly varying functions $f(x)$ is therefore that we may consider $f(x)$ as a *constant* factor in the evaluation of the energy.

It may be worthwhile to note that the consequences of our explicit assumption on the slowly varying character of the functions $f(x)$ are equivalent to the (tacit) assumption in other approaches to our problem [15], [16] that the stiffness in axial compression of a plate strip in the post-buckling situation is a *local* property, determined by the magnitude of the edge strains of the strip in question at the value of the axial coordinate x under consideration.

We return to our formulation of assumptions for combined buckling modes. In our *lower bound analysis* we ignore again the membrane stresses σ_s and τ_{xs}. We take into account the contribution $W(x) \sin \theta(s)$ to the tangential displacement component $v_t(x, s)$, cf. fig. 5. For the normal deflection and the axial displacement components we assume

$$w_n(x, s) = W(x) \cos \theta(s) + f(x) g(s) \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{6.4}$$

$$u(x, s) = U(x) - z(s) W'(x) - \frac{\pi}{8a} f^2(x) g^2(s) \sin \frac{2\pi x}{a} - $$

$$- W'(x) f(x) g(s) \cos \theta(s) \sin \frac{\pi x}{a}, \tag{6.5}$$

where $U(x)$ is the axial displacement at the centroid of the cross-section. Our reason for including the last term in (6.5) is that the local deflection increases the distance $z(s)$ to the y-axis by an amount $f(x) g(s) \cos \theta(s) \sin \dfrac{\pi x}{a}$.

The axial (additional) direct strain component γ_{xx}, due to combined buckling, is evaluated on the assumption of a slowly varying function $f(x)$, thus treating this function in differentiations as a constant factor. We obtain

$$\gamma_{xx} = U'(x) - zW''(x) + \frac{1}{2}W'^2(x) + \frac{\pi^2}{4a^2}f^2(x)g^2(s)\,. \qquad (6.6)$$

Minimizing the associated membrane energy density $\frac{1}{2}E\gamma_{xx}^2$, *averaged over the cross-section*, with respect to $U'(x)$, we have the result

$$U'(x) = -\frac{1}{2}W'^2(x) - \frac{\pi^2}{4a^2}f^2(x)\overline{g^2}\,, \qquad (6.7)$$

where the bar over g^2 again denotes the average value of $g^2(s)$ over the cross-section. The resulting average value of the membrane energy density over the cross-section is now

$$\frac{1}{2}E\gamma_{xx}^2 = \frac{1}{2}E\left[i^2W''^2(x) - \frac{\pi^2}{2a^2}W''(x)f^2(x)(\overline{zg^2}) + \frac{\pi^4}{16a^4}f^4(x)\{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2\}\right], \qquad (6.8)$$

where the barred quantities are again defined by (4.4).

The uniform compressive stress σ in the fundamental state leads to an energy contribution in the transition to the buckled state, equal to $-\sigma$ times the quadratic terms in the strain (6.6), again per unit volume. Averaging this energy density again over the cross-section, we obtain the contribution

$$-\frac{1}{2}\sigma W'^2(x) - \sigma\frac{\pi^2}{4a^2}f^2(x)\overline{g^2}\,. \qquad (6.9)$$

Finally, we evaluate the flexural energy, also averaged over the cross-section. In terms of the critical stress σ_{cr} for local buckling we obtain the contribution [cf. (2.5)]

$$\sigma_{cr}\frac{\pi^2}{4a^2}f^2(x)\overline{g^2}\,. \qquad (6.10)$$

In this evaluation we have made use once again of the slowly varying character of the function $f(x)$.

Adding our three contributions (6.8)–(6.10), we obtain the total energy density, averaged over the cross-section of the panel,

$$\frac{1}{2}Ei^2W''^2(x) - \frac{1}{2}\sigma W'^2(x) + (\sigma_{cr} - \sigma)\frac{\pi^2}{4a^2}f^2(x)\overline{g^2} +$$

$$+ E\frac{\pi^4}{32a^4}f^4(x)\left[\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2\right] - E\frac{\pi^2}{4a^2}W''(x)f^2(x)(\overline{zg^2})\,. \qquad (6.11)$$

The energy functional, representing the increment in potential energy in the transition from the pre-buckling fundamental state, is now obtained by multiplying (6.11) by the area A of the cross-section and integrating over the entire panel length, a (large) multiple of the bay length L.

The subsequent analysis is simplified considerably by introducing nondimensional quantities. An important first parameter is the ratio λ_E of the Euler critical stress σ_E (5.1) to the critical stress for local buckling σ_{cr}

$$\lambda_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_{cr}} . \tag{6.12}$$

It will also be convenient to express the compressive load on the panel in terms of the critical load for local buckling by means of the *load factor*

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} . \tag{6.13}$$

We introduce a nondimensional axial coordinate $\xi = x/L$, and derivatives with respect to ξ are henceforward denoted by dots [1]. The amplitude function $f(x)$ of the local buckling mode and the deflection $W(x)$ of the overall mode are expressed in terms of nondimensional functions $\phi(\xi)$ and $\psi(\xi)$ by means of the substitutions

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sigma_{cr}}{E}\,\frac{\overline{g^2}}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2}\right]^{1/2}\phi(\xi) , \tag{6.14}$$

$$W(x) = \pi L\left[\frac{2\sigma_{cr}}{E\lambda_E}\,\frac{1}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2}\right]^{1/2}\overline{g^2}\psi(\xi) . \tag{6.15}$$

Expression (6.11) for the energy density, averaged over the cross-section of the panel, is now reduced to

$$\frac{\sigma_{cr}^2}{E}\,\frac{(\overline{g^2})^2}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2}\left[\ddot{\psi}^2(\xi) - \pi^2\frac{\lambda}{\lambda_E}\dot{\psi}^2(\xi) + (1-\lambda)\phi^2(\xi) + {} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\phi^4(\xi) - \sqrt{2}\,B\ddot{\psi}(\xi)\phi^2(\xi)\right] , \tag{6.16}$$

where the nondimensional parameter B is defined by

$$B = \frac{(\overline{zg^2})}{i\,[\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2]^{1/2}} . \tag{6.17}$$

---

[1] No confusion need arise with the same dot symbol denoting differentiations with respect to s in (4.16).

This constant is intimately related to the lower bound (4.12) for the bending reduction factor, viz.

$$\eta_b = 1 - B^2 . \tag{6.18}$$

Completely similar to our discussion in section 4 we may replace the energy density (6.16) averaged over the panel cross-section by a *more accurate expression*, simply by replacing $\overline{g^4}$, defined by (4.4), by the larger value $\overline{g^4_*}$, defined by (4.16). This replacement has to be carried out everywhere in (6.14), (6.15) and (6.16), and it is accompanied by the replacement of the parameter B by B^*, defined by

$$B^* = \frac{(\overline{zg^2})}{i[\overline{g^4_*} - (\overline{g^2})^2]^{1/2}} . \tag{6.19}$$

This new value B^* is related to the improved approximation (4.15) for the bending reduction factor by

$$\eta_b^* = 1 - B^{*2} . \tag{6.20}$$

The reader should note that we have introduced in (6.14), (6.15) nondimensional local and overall deflections $\phi(\xi)$ and $\psi(\xi)$ which are *different* from similar nondimensional quantities employed in [12], for the following reason. It may happen that our present parameter B or B^* tends to zero, and in that case the parameter A in [12] (not to be confused with the same symbol employed for the cross-sectional area in the present paper) grows indefinitely, whereas the nondimensional overall deflection in [12] goes to zero. The formulation in [12] is therefore inappropriate for very small values of B or B^*, equivalent to very large values of the parameter A in [12].

The significant simplification achieved by the introduction of dimensionless deflections $\phi(\xi)$ and $\psi(\xi)$ is that the *panel data enter into the expression between brackets in* (6.16) *only in terms of two nondimensional parameters,* namely $\lambda_E = \sigma_E/\sigma_{cr}$ and B defined by (6.17). Moreover, the panel length L enters only into the first parameter, whereas B *depends only on the geometry of the panel cross-section.* The same observation holds for the improved expression where B is replaced by B^* (6.19).

7. — Nondimensional energy functional.

The energy functional, which represents the increment of the total potential energy in the transition from the pre-buckling fundamental state at a uniform compressive stress $\sigma = \lambda\sigma_{cr}$, is obtained from (6.16) by multiplying by the area A of the cross-section and by integrating over the panel length. In nondimensional form this functional is represented by

integrating the expression between brackets in (6.16) with respect to the nondimensional axial coordinate ξ. Our further analysis is therefore based on the functional

$$P\left[\psi(\xi),\ \phi(\xi);\ \lambda\right] = \int \left[\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) + (1-\lambda)\phi^2(\xi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\phi^4(\xi) - \sqrt{2}\, B\psi^{\cdot\cdot}(\xi)\phi^2(\xi)\right] d\xi. \quad (7.1)$$

This expression holds for the lower bound approximation to the post-buckling stiffness, where B is defined by (6.17). In the more accurate approximation B is replaced by B^*, defined by (6.19).

In a multi-bay panel, with a large number of bays in the axial direction, overall buckling will be alternating upward and downward, and the buckling pattern will be periodic with an axial period equal to *twice* the bay length L. The energy functional is then represented by the *integral* (7.1) *over an interval of length* 2, *the nondimensional axial period.*

A significant quantity in post-buckling calculations is the additional generalized deflection due to buckling, associated with the external load. In the case of our panel under axial compression this generalized deflection is the overall shortening of the panel. By the general theory of elastic stability [2], [11] the additional overall shortening is given by the negative of the partial derivative of the potential energy functional with respect to the load. The pre-buckling overall shortening is described conveniently by the unit shortening $\varepsilon = \sigma/E$. Describing the additional shortening due to buckling in similar terms, we divide the overall shortening over a period $2L$ of the panel by the length $2L$ of this period, and thus define the *additional unit overall shortening* $\Delta\varepsilon$. Hence we obtain from (6.16)

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} = \frac{(\overline{g^2})^2}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2} \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\frac{\pi^2}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) + \phi^2(\xi)\right] d\xi, \quad (7.2)$$

where $\varepsilon_{cr} = \sigma_{cr}/E$ is the pre-buckling unit overall shortening at the critical stress for local buckling.

Actual panels are never perfect in the sense that the centroidal axis is a straight line and the plate strips are completely flat. In the analysis of buckling problems it is nearly always necessary to allow for the effect of such initial geometric imperfections as occur in actual structures. Little information is usually available about the imperfections to be expected in manufactured stiffened panels, except for some data on the initial crookedness of the centroidal axis and about the initial waviness of the plate strips. We do know, however, that imperfections in the shape of

buckling modes for the perfect structure have in general the most adverse effect. Hence we assume an initial waviness of the plate strips in the shape of the local buckling mode

$$w_{n0}(x, s) = f_0(x)g(s) \sin \frac{\pi x}{a} . \tag{7.3}$$

The initial crookedness of the centroidal axis is assumed in the form $W_0(x)$. Both functions $f_0(x)$ and $W_0(x)$ are rendered dimensionless in the form $\phi_0(\xi)$ and $\psi_0(\xi)$ by the same dimensional factors as occur in (6.14) and (6.15) respectively.

In our problem we have a so-called *linear pre-buckling state,* which enables us to allow for the influence of small geometric imperfections in a particularly simple way [5], [6], [11]. The expression between brackets in (6.16) has to be augmented by two terms containing the load factor λ, both of these terms bilinear in the initial imperfections and in the buckling deflections. The modified energy functional replacing (7.1) in the presence of initial geometric imperfections is indeed

$$\begin{aligned} P^*[\psi(\xi), \phi(\xi);\ \psi_0(\xi), \phi_0(\xi);\ \lambda] = \\ = \int \Big[\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) - 2\pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi_0^{\cdot}(\xi)\psi^{\cdot}(\xi) + \\ + (1-\lambda)\phi^2(\xi) - 2\lambda\phi_0(\xi)\phi(\xi) + \frac{1}{2}\phi^4(\xi) - \sqrt{2}\, B\psi^{\cdot\cdot}(\xi)\phi^2(\xi) \Big] d\xi . \end{aligned} \tag{7.4}$$

Here again the additional average unit overall shortening $\Delta\varepsilon^*$ due to the imperfections and buckling deflections is given by a simple expression similar to (7.2)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varepsilon^*}{\varepsilon_{cr}} = \frac{(\overline{g^2})^2}{\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2} \frac{1}{2} \int_0^2 \Big[\frac{\pi^2}{\lambda_E} \{ \psi^{\cdot 2}(\xi) + 2\psi_0^{\cdot}(\xi)\psi^{\cdot}(\xi) \} + \\ + \phi^2(\xi) + 2\phi_0(\xi)\phi(\xi) \Big] d\xi . \end{aligned} \tag{7.5}$$

8. — Stability limit of pre-buckling state.

The second variation of the potential energy is specified by the quadratic terms in the functional (7.1). Neutral equilibrium occurs in the *local mode* for $\lambda = 1$ and an arbitrary slowly varying function $\phi(\xi)$. The slowly varying character of the nondimensional amplitude function $\phi(\xi)$ is here expressed by rewriting the inequalities (6.1) in the form

$$\int \phi^{\cdot 2}(\xi) d\xi < C\pi^2 \int \phi^2(\xi) d\xi, \qquad \int \phi^{\cdot\cdot 2}(\xi) d\xi < C\pi^4 \int \phi^2(\xi) d\xi, \tag{8.1}$$

where C is a number of order of magnitude unity. Neutral equilibrium also occurs in the (critical) *overall mode* $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$ at a load factor $\lambda = \lambda_E$, where α is the indeterminate amplitude. The stability limit of the linear pre-buckling state is therefore $\lambda = \text{Min}(\lambda_E, 1)$.

From the general theory of elastic stability ([5], [6], [2], [11] we know that the post-buckling behaviour of a structure strongly depends on the stability or instability of equilibrium in the critical case of neutral equilibrium. A simple answer to this question is obtained in the case $\lambda_E = 1$. In this case we have the *simultaneous* occurrence of the *local* mode $\phi(\xi)$ and the *overall* mode $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$, and the equilibrium at the critical load factor $\lambda = \lambda_E = 1$ is *unstable* because the cubic term in the energy functional (7.1) does not vanish identically for these modes.

Nearly equally simple is the *case* $\lambda_E < 1$ where the *overall mode* is the critical mode. The second variation of the energy functional is here for variations $\delta\psi(\xi)$ and $\delta\phi(\xi)$ of the two argument functions in (7.1)

$$\delta^2 P = \int \left[\delta\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \delta\psi^{\cdot 2}(\xi) + \{ 1 - \lambda + \pi^2 \sqrt{2}\, B\alpha \sin \pi\xi \} \delta\phi^2(\xi) \right] d\xi. \tag{8.2}$$

For sufficiently small finite values of the amplitude factor α the last term in (8.2) is positive definite at the critical load factor $\lambda = \lambda_E < 1$. The remainder of (8.2) is a positive *semi-definite* functional of $\delta\psi(\xi)$. It follows that the equilibrium at the critical load factor $\lambda = \lambda_E < 1$ is *strictly neutral* with an arbitrary value of the amplitude factor in the range

$$|\alpha B| \leqq \frac{1 - \lambda_E}{\pi^2 \sqrt{2}}. \tag{8.3}$$

The present result on the strictly neutral character of the overall buckling mode at $\lambda = \lambda_E < 1$ is not in complete agreement with the well-known accurate nonlinear theory of the Euler column. The reason for the discrepancy is that we have described the curvature of the panel in overall buckling by the approximation $W''(x)$. For all practical purposes, however, this approximation is perfectly adequate. In fact, the restrictions (8.3) on the amplitude factor α imply that the deflection $W(x)$ is bounded above by means of (6.15)

$$|W(x)| < \frac{\overline{g^2}}{[\overline{g^4} - (\overline{g^2})^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{1 - \lambda_E}{\lambda_E} \frac{i}{|B|}. \tag{8.4}$$

For such small deflections the actual increase of the load over the critical load in the exact Euler column theory is indeed completely negligible.

In the case $\lambda_E > 1$ the *local mode*, an arbitrary slowly varying function $\phi(\xi)$, is the critical mode at the buckling load factor $\lambda = 1$. According to the general procedure of the nonlinear theory of elastic stability [5], [6], [11] we have now to minimize first

$$\int \left[\bar{\psi}^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{1}{\lambda_E} \bar{\psi}^{\cdot 2}(\xi) - \sqrt{2}\, B \bar{\psi}^{\cdot\cdot}(\xi) \phi^2(\xi) \right] d\xi \tag{8.5}$$

with respect to $\bar{\psi}(\xi)$, for a given arbitrary (slowly varying) function $\phi(\xi)$. The result is a (negative) functional of $\phi(\xi)$ of degree 4. If and only if its magnitude is less than $\int \frac{1}{2} \phi^4(\xi) d\xi$, equilibrium at the critical load factor $\lambda = 1$ of local buckling is stable.

In view of the arbitrariness of the buckling mode $\phi(\xi)$, the general procedure sketched above is not very convenient. The simple structure of the complete functional (7.1), however, allows here a different approach. At the critical load factor $\lambda = 1$ of local buckling we may minimize the functional with respect to $\phi^2(\xi)$, keeping $\psi(\xi)$ fixed as an arbitrary admissible function. The minimizing value of $\phi^2(\xi)$ is *zero* wherever $B\psi^{\cdot\cdot}(\xi)$ is *negative*, and it is given by

$$\phi^2(\xi) = \sqrt{2}\, B \psi^{\cdot\cdot}(\xi) \tag{8.6}$$

wherever this expression is *positive*. The resulting minimum is still a functional of $\psi(\xi)$

$$\int \left[\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{1}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) - \underline{B^2 \psi^{\cdot\cdot 2}(\xi)} \right] d\xi\,, \tag{8.7}$$

where the dotted underlined term is only present in intervals where $B\psi^{\cdot\cdot}(\xi)$ is positive. Equilibrium at the critical load factor is now stable, if and only if the functional (8.7) is positive definite.

The homogeneous quadratic functional (8.7) may be regarded as an eigenvalue problem for the parameter $1/\lambda_E$. A simple, and as we shall see adequate approximate solution for the smallest eigenvalue is obtained by assuming a sinusoidal function $\psi(\xi) = \sin \pi\xi$ as the approximate eigenfunction. We obtain the approximation $1/\lambda_E = 1 - \frac{1}{2} B^2$. It is easily seen that the exact solution of the eigenvalue problem for our multi-bay panel is obtained by a periodic function of (nondimensional) period 2, each period consisting of two half sine waves of a wave length ratio $\sqrt{1 - B^2}$. The resulting *exact* eigenvalue is

$$\frac{1}{\lambda_E} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} B^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - B^2}. \tag{8.8}$$

The approximate result $1/\lambda_E = 1 - \dfrac{1}{2} B^2$ is even adequate for values of B^2 up to 0.5, where the exact eigenvalue 0.73 is indeed approximated quite well by the approximation 0.75. In the sequel we shall therefore employ the simpler approximation. Our result is thus that the critical case of neutral equilibrium at $\lambda = 1$ for $\lambda_E > 1$ is *stable* for $\lambda_E > (1 - \frac{1}{2} B^2)^{-1}$ and *unstable* for $1 < \lambda_E < (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$. In view of the homogeneous quadratic character of the functional (8.7), equilibrium at the critical load factor $\lambda = 1$ is *strictly neutral* for $\lambda_E = (1 - \dfrac{1}{2} B^2)^{-1}$.

The results of our investigation of the stability of the pre-buckling state are summarized in fig. 6. The shaded area represents the stable domain, and the figure is self-explanatory as to the boundary of the stable region.

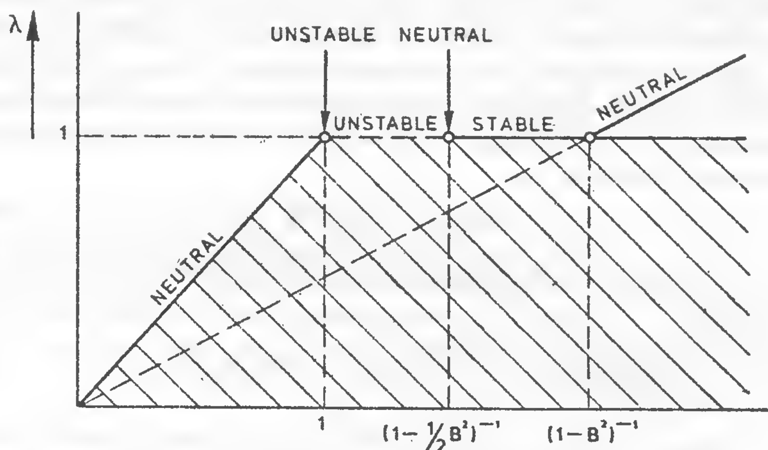


Fig. 6 – Stability diagram for pre-buckling state.

9. — Post-buckling solutions for a perfect panel.

All equilibrium configurations of the panel are characterized by stationary values of the energy functional (7.1) with respect to the functions $\psi(\xi)$ and $\phi(\xi)$. We have already fully discussed the pre-buckling fundamental state $\psi(\xi) = \phi(\xi) \equiv 0$ and its stability. We turn now to a discussion of the post-buckling solutions, bifurcating from the fundamental state when the critical load factor is attained, $\lambda = \lambda_E$ in the case $\lambda_E < 1$, and $\lambda = 1$ in the case $\lambda_E > 1$. The general theory of elastic stability leads us to expect a completely different post-buckling behaviour when the stability boundary is reached in a stable, unstable or strictly neutral point, and this expectation will be fully confirmed in the sequel. The analysis in the present special case, however, may be simplified by appropriate exploitation of the specific structure of the energy functional (7.1).

Guided by our experience in the previous section we *minimize the functional* (7.1) *first with respect to* $\phi^2(\xi)$. We obtain

$$\phi^2(\xi) = \lambda - 1 + \sqrt{2}\, B\psi^{\cdot\cdot}(\xi) \tag{9.1}$$

wherever the right-hand member is *positive*. On the other hand, we have $\phi^2(\xi) = 0$ where the right-hand member of (9.1) is *negative*.

We now have to consider *several possibilities*. It may happen that the right-hand member of (9.1) is sign-definite over the entire period of length $2L$, characteristic for the panel, either negative or positive. A third possibility is that the positive and negative signs of the right-hand member of (9.1) both occur, each in its own part of the period.

In the case of a *negative definite* right-hand member of (9.1) we must have $\lambda \leqq 1$, and the inequality sign even holds unless $\psi(\xi) \equiv 0$. The functional (7.1) becomes for $\phi(\xi) \equiv 0$

$$\int \left[\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) \right] d\xi\,, \tag{9.2}$$

and it has a stationary value at $\lambda = \lambda_E < 1$ described by $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$. The *indeterminate* value of α is here restricted by the inequalities (8.3) which ensure that the sign of the right-hand member of (9.1) is negative everywhere. In view of the homogeneous quadratic character of the functional (9.2) the equilibrium is *strictly neutral*.

In the case of a *positive definite* right-hand member of (9.1) we must have $\lambda \geqq 1$, and the inequality sign even holds unless $\psi^{\cdot\cdot}(\xi) \equiv 0$. In this case the functional (7.1) is reduced to

$$\int \left[(1 - B^2)\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi^{\cdot 2}(\xi) - \sqrt{2}\, B(\lambda - 1)\psi^{\cdot\cdot}(\xi) - \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \right] d\xi\,. \tag{9.3}$$

Stationary values of this functional are characterized by solution of the differential equation

$$(1 - B^2)\psi^{\cdot\cdot\cdot\cdot}(\xi) + \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \psi^{\cdot\cdot}(\xi) = 0\,, \tag{9.4}$$

and the stability of equilibrium is governed by the second variation

$$\int \left[(1 - B^2)\delta\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E} \delta\psi^{\cdot 2}(\xi) \right] d\xi\,. \tag{9.5}$$

The *zero solution* of (9.4) corresponds to *purely local buckling* with a constant value $\phi^2(\xi) = \lambda - 1$ by (9.1), and it is *stable* up to the value

$\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$. This solution is evidently real only for $\lambda_E \geqq (1 - B^2)^{-1}$. A *non-zero solution* of (9.4) is $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$, and it occurs only at $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$. The value of α is here *indeterminate* but restricted by (9.1) to the range

$$|\alpha B| \leqq \frac{(1 - B^2)\lambda_E - 1}{\pi^2 \sqrt{2}} . \tag{9.6}$$

The second variation (9.5) is semi-definite positive at $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$, and the absence of higher order terms in the functional (9.3) renders the solution $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$ at $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$ *strictly neutral*. This neutral solution is also included in fig. 6.

We turn now to the third class of post-buckling solutions with an *alternating sign* of the right-hand member of (9.1). In this case we shall be content, for the sake of simplicity, with an *approximate* solution by assuming

$$\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi , \tag{9.7}$$

with a constant amplitude factor α, to be determined from our analysis. In view of our experience with the approximate solution of the eigenvalue problem (8.7), where the deviation of the actual buckling mode from (9.7) is most pronounced, we expect our present approximation to be more than adequate for values of B^2 less than approximately 0.5.

Without any loss in generality we may restrict our attention to panels with a *negative* value of B, and likewise we may assume α to be *positive*. The right-hand member of (9.1) is then positive in an interval $\frac{1}{2} - \mu < \xi < \frac{1}{2} + \mu$, where μ is defined by

$$\cos \pi\mu = \frac{\lambda - 1}{\pi^2 \sqrt{2}\, B\alpha}, \quad 0 < \mu < 1 . \tag{9.8}$$

The energy functional over a period of nondimensional length 2 is now evaluated in the form

$$\pi^4\alpha^2\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}-\mu}^{\frac{1}{2}+\mu} \left[2\pi^4 B^2\alpha^2 \sin^2 \pi\xi + (\lambda - 1)^2 - \right.$$
$$\left. - 2\pi^2 \sqrt{2}\,(\lambda - 1)\, B\alpha \sin \pi\xi \right] d\xi =$$
$$= \pi^4\alpha^2 \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_E} - B\, 2\left(\mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\mu\right)\right] +$$
$$+ 2\pi\sqrt{2}\,(\lambda - 1) B\alpha \sin \pi\mu - (\lambda - 1)^2\mu . \tag{9.9}$$

It is now convenient to regard μ as the independent parameter, rather than α, and to eliminate the amplitude factor by means of (9.8). The energy expression (9.9) is thus replaced by

$$(\lambda - 1)^2 \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}\right) \frac{1}{2B^2 \cos^2 \pi\mu} - \mu\left(1 + \frac{1}{2 \cos^2 \pi\mu}\right) + \frac{3}{2\pi} \tan \pi\mu\right]. \tag{9.10}$$

The equilibrium values of μ are evaluated from the equation obtained by putting the partial derivative of (9.10) with respect to μ equal to zero. Combining this equation with (9.8) we arrive at a parametric representation of the relation between λ and α in the equilibrium configuration

$$\lambda = \lambda_E \left[1 - B^2\left(\mu - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\mu\right)\right], \quad \alpha = \frac{\lambda - 1}{\pi^2\sqrt{2}B \cos \pi\mu}. \tag{9.11}$$

The stability of the solution (9.11) is governed by the sign of the second derivative of (9.10) with respect to μ. By appropriate use of (9.11) it may be established that this sign is the opposite of the sign of $\tan \pi\mu$. It follows that the solution (9.11) is unstable for $\mu < \dfrac{1}{2}$ and stable for $\mu > \dfrac{1}{2}$.

Since we require $\alpha > 0$ and $B < 0$, we must have $\lambda \leqq 1$ in the range $0 \leqq \mu < \frac{1}{2}$. For $\mu = 0$, we have by the first equation (9.11) $\lambda = \lambda_E$, and the range $0 \leqq \mu < \frac{1}{2}$ can therefore only apply in cases where $\lambda_E \leqq 1$. If we increase μ in these cases from zero the load factor λ decreases, whereas α increases from the initial value $\dfrac{\lambda_E - 1}{\pi^2\sqrt{2}B}$, and α grows beyond all bounds for $\mu \to \dfrac{1}{2}$. The corresponding asymptotic value of the load factor $\lambda = (1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$. Equilibrium on this descending post-buckling path is *unstable.*

The entire range $0 \leqq \mu < \dfrac{1}{2}$ cannot apply in cases where $\lambda_E > 1$, but an interval $\mu_1 \leqq \mu < \dfrac{1}{2}$, where $0 < \mu_1 < \dfrac{1}{2}$ is defined by

$$\lambda_E = 1 + B^2\left(\mu_1 - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\mu_1\right), \tag{9.12}$$

does apply in cases where $1 < \lambda_E < (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$. The associated *unstable* descending post-buckling path starts at $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, and $\alpha \to \infty$ for $\lambda \to (1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$, a value less than unity. In the case $\lambda_E = (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$ we have by (9.11) $\mu = \frac{1}{2}$ at $\lambda = 1$, and the amplitude factor α remains

indeterminate. In this case we have a *strictly neutral* horizontal post-buckling path.

We now turn our attention to the *range* $\frac{1}{2} < \mu \leqq 1$, where we must have $\lambda \geqq 1$. For $\lambda_E \geqq (1 - B^2)^{-1}$ we may consider values of μ decreasing from $\mu = 1$, and the load factor then increases stably from the value $(1 - B^2)\lambda_E$ to the asymptotic value $(1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$ for $\mu \to \frac{1}{2}$. The amplitude factor α grows here beyond all bounds from its initial value $[1 - (1 - B^2)\lambda_E]/\pi^2\sqrt{2}\,B$ at $\mu = 1$, defined by (9.6).

For $(1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1} < \lambda_E < (1 - B^2)^{-1}$ the entire range $\frac{1}{2} < \mu \leqq 1$ cannot apply, but an interval $\frac{1}{2} < \mu < \mu_2$ does apply, where μ_2 $(\frac{1}{2} < \mu_2 < 1)$ is defined by

$$\lambda_E = 1 + B^2\left(\mu_2 - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\mu_2\right) . \tag{9.13}$$

The associated *stable*, rising post-buckling path starts at $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, and $\alpha \to \infty$ for $\lambda \to (1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$.

As we have mentioned before in section 7, the post-buckling characteristics of a structure are perhaps depicted most graphically in a diagram of load *vs* generalised deflection associated with the load. For this purpose we have to evaluate expression (7.2) in the post-buckling path. The general result is with $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} = \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\left[\frac{\pi^4\alpha^2}{2\lambda_E} + \frac{1}{2}\int_0^2 \phi^2(\xi)d\xi\right] . \tag{9.13}$$

In the case where the right-hand of (9.1) is *negative everywhere*, we have a *constant value of the load factor* $\lambda = \lambda_E < 1$, and the associated value of (9.13) is positive and arbitrary, but bounded above by the inequality

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \leqq \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\,\frac{(1 - \lambda_E)^2}{4B^2\lambda_E} . \tag{9.14}$$

In the case where the right-hand member of (9.1) is *positive everywhere*, we must have $\lambda_E \geqq (1 - B^2)^{-1}$. In the *load factor range* $1 < \lambda < (1 - B^2)\lambda_E$ we have $\alpha = 0$ and $\phi^2(\xi) = \lambda - 1$, resulting in

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} = \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\,(\lambda - 1) . \tag{9.15}$$

At the load factor $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$ overall buckling occurs at a constant load, and with an arbitrary value of the amplitude factor α up to the limit

specified by (9.6). Hence we obtain from (9.1) and (9.13) at the *constant load factor* $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$

$$\frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\left[(1 - B^2)\lambda_E - 1\right] \leqq \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\left[(1 - B^2)\lambda_E - 1 + \frac{\{(1 - B^2)\lambda_E - 1\}^2}{4B^2\lambda_E}\right]. \quad (9.16)$$

Finally, we evaluate (9.13) for the solution (9.11) with *alternating signs* of the right-hand member of (9.1). The result of a simple calculation is here

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} = \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\left[(\lambda - 1)\left(\mu - \frac{1}{\pi}\tan\pi\mu\right) + \frac{(\lambda - 1)^2}{4B^2\,\lambda_E\cos^2\pi\mu}\right]. \quad (9.17)$$

Some results of numerical calculations are depicted in fig. 7. Typical values of the parameter B^2 for stiffened panels lie in the range 0.1-0.2, and we select the value $B^2 = 1/6$ for the Tvergaard panel [19], also considered in [12]. Apart from their common property of a horizontal asymptote at a value $\lambda = (1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$, the curves vary widely in character for various values of λ_E.

For $\lambda_E < 1$ the curve starts with a horizontal tangent at $\lambda = \lambda_E$ up to the value of the unit shortening specified by the right-hand member of (9.14), point A in fig. 7. This segment represents purely overall buckling. Local buckling begins at point A, and the curve descends while the region of local buckling progresses in the bays with an upward overall deflection in fig. 3. The tangent to the curve at A is horizontal, but its curvature is infinite, concave downwards.

The character of the curve changes drastically at the critical values $\lambda_E = 1$. It has a vertical slope at $\lambda = 1$, and it is represented asymptotically near $\lambda = 1$ by the parabola

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} = \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2}\,\frac{3(1 - \lambda)^2}{4B^2}\,, \quad (9.18)$$

also depicted in fig. 7. This behaviour is strongly reminiscent of the behaviour of a cylindrical shell under axial compression [5], [6]. An essential difference is, however, that the curve in fig. 7 *flattens out quite soon*, in order to approach the asymptote $\lambda = (1 - \frac{1}{2}B^2)\lambda_E$.

For values of λ_E in the range $1 < \lambda_E \leqq (1 - B^2)^{-1}$ we have continuous curves with a finite slope at $\lambda = 1$, negative for $\lambda_E < (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$, and positive for $\lambda_E > (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$. At $\lambda_E = (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$ we have a horizontal straight line, correspond to neutral equilibrium at a constant load factor

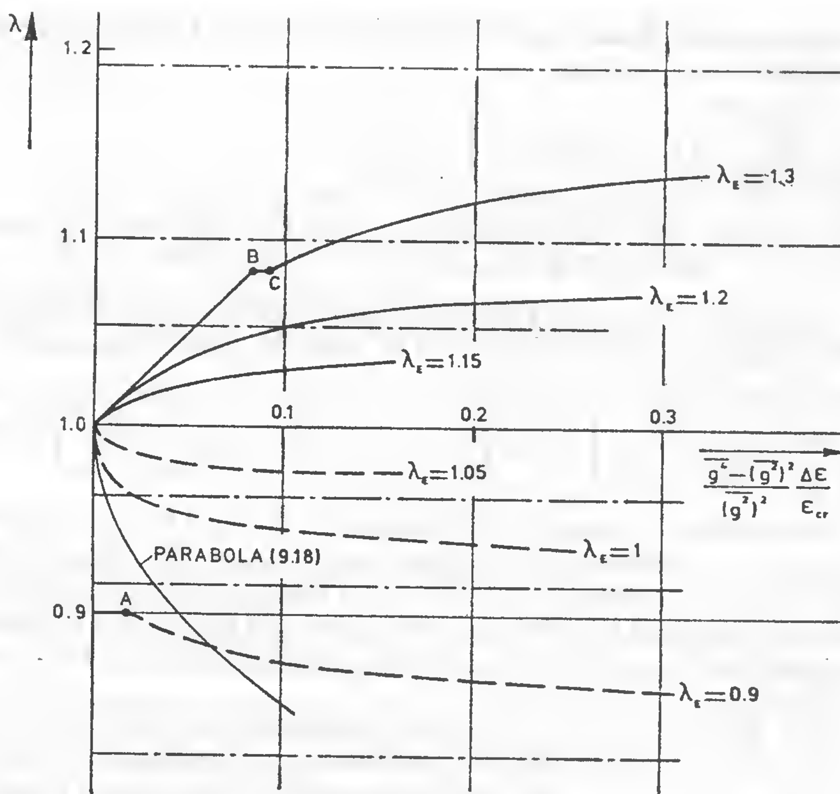


Fig. 7 – Load-generalized deflection curves in post-buckling range.

with local buckling occurring over the entire bay length in those bays where the overall deflection is upward. The rising curves for $\lambda_E > (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$ represent stable post-buckling solutions as compared with the descending curves for $\lambda_E < (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$ which are all unstable (dotted in fig. 7).

Finally, in the range $\lambda_E > (1 - B^2)^{-1}$ local buckling occurs first over the entire panel length, and the curve degenerates to the straight line (9.15) up to the load factor $\lambda = (1 - B^2)\lambda_E$. At this point B in fig. 7 overall buckling occurs at a constant load factor until the local buckling deflection is reduced to zero at the mid-points of the downward deflecting bays (point C in fig. 7). The tangent to the curve at C is again horizontal, and the curvature is again infinite but now concave upwards.

10. — Sensitivity to local imperfections.

We shall consider only the simplest case of a constant value $\phi_0(\xi) = \beta_0 > 0$ for the local imperfections. Inspection of the energy functional (7.4) with $\psi_0(\xi) \equiv 0$ yields as a solution of the equations of equilibrium

$\psi(\xi) \equiv 0$ and $\phi(\xi) = \beta$, where the constant value β is a solution of the equation

$$\beta^3 + (1 - \lambda)\beta - \lambda\beta_0 = 0\,. \tag{10.1}$$

The stability of this solution is governed by the second variation of (7.4), associated with the present solution of the equation of equilibrium

$$\delta^2 P^* = \int\Big[\delta\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2\,\frac{\lambda}{\lambda_E}\,\delta\psi^{\cdot 2}(\xi) + (1 - \lambda + 3\beta^2)\delta\phi^2(\xi) - - 2\sqrt{2}B\beta\delta\psi^{\cdot\cdot}(\xi)\delta\phi(\xi)\Big]d\xi\,. \tag{10.2}$$

The critical mode is obviously $\delta\psi(\xi) = \delta\alpha \sin \pi\xi$, $\delta\phi(\xi) = \delta\beta \sin \pi\xi$, and the second variation reduces to the quadratic form

$$\pi^4\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}\right)\delta\alpha^2 + (1 - \lambda + 3\beta^2)\delta\beta^2 + 2\sqrt{2}\,\pi^2 B\beta\delta\alpha\delta\beta\,. \tag{10.3}$$

The *critical load factor* λ^* *of the imperfect panel* is characterized by a zero value of the discriminant of the quadratic form (10.3). Combining this condition with the equation of equilibrium (10.1) in order to eliminate β, we arrive at the equation

$$(1 - \lambda^*)\,\frac{2B^2 - 2(1 - \lambda^*/\lambda_E)}{2B^2 - 3(1 - \lambda^*/\lambda_E)}\left[\frac{(1 - \lambda^*)(1 - \lambda^*/\lambda_E)}{2B^2 - 3(1 - \lambda^*/\lambda_E)}\right]^{\frac{1}{2}} = \lambda^*\beta_0. \tag{10.4}$$

Our result for the critical load factor λ^* as a function of λ_E, for various values of the imperfection parameter β_0, is represented in fig. 8 for the typical value $B^2 = 1/6$. In the case of the Tvergaard panel [19], [12] the amplitude w_0 of the local imperfections is by (6.14) equal to $w_0 = 1.43\,\beta_0 h$. It follows from fig. 8 that *very small imperfections,* of the order of a few percent of the plate thickness, already have *significant consequences.* On the other hand, if we plot λ^* as a function of w_0/h at a particular value of λ_E, we observe a *rapid flattening* of the curve for increasing values of the imperfections. This effect is illustrated by fig. 9 in the case $\lambda_E = 1$, again for the Tvergaard panel.

The sensitivity to imperfections is most marked at $\lambda_E = 1$, where overall and local buckling occur simultaneously in the perfect structure. The asymptotic approximation for very small values of β_0

$$(1 - \lambda^*)^2 = -\sqrt{2}B\beta_0\,, \tag{10.5}$$

obtained from (10.4) and also drawn in fig. 9, ceases to be reliable for values of β_0 in excess of approximately 0.01. The basic reason for the rapid

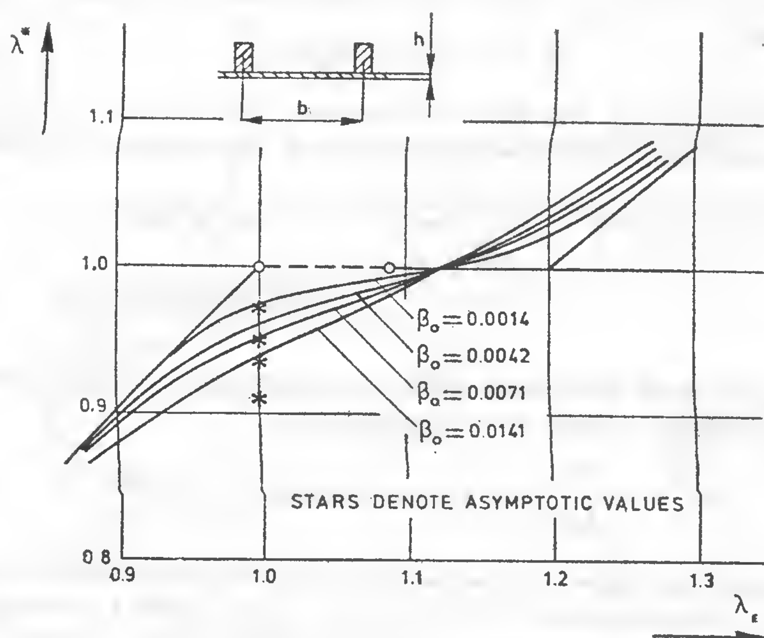


Fig. 8 – Sensitivity to local imperfections for Tvergaard panel ($B^2 = 1/6$).

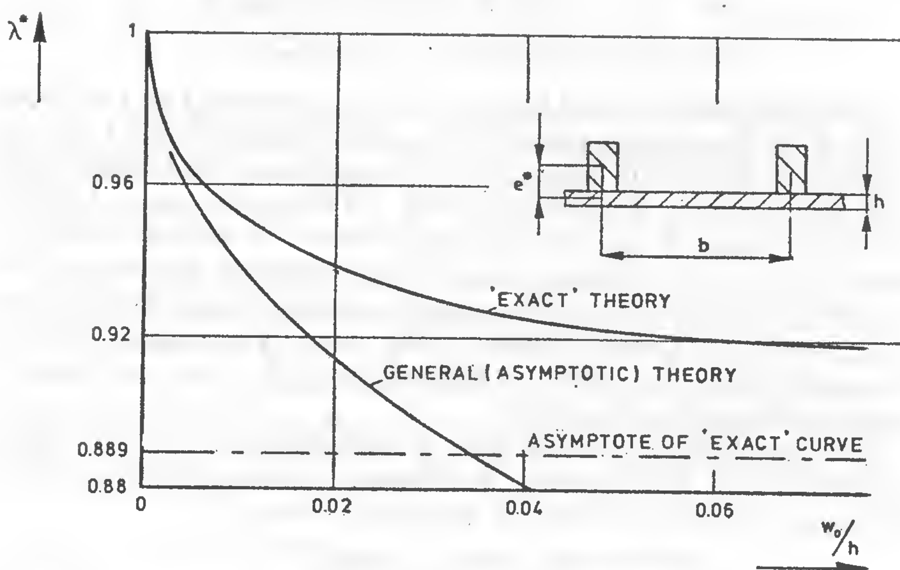


Fig. 9 – Sensitivity to local imperfections (amplitude w_o) for Tvergaard panel at $\lambda_E = 1$.

flattening of the "exact" curve in fig. 9 is that the denominator in the left-hand member of (10.4) tends to zero for $\lambda^* \to \left(1 - \frac{2}{3} B^2\right)\lambda_E$. Hence we must have for $\lambda_E < \left(1 - \frac{2}{3} B^2\right)^{-1}$ a *lower bound* for λ^*, specified by

$$\lambda^* > \left(1 - \frac{2}{3} B^2\right)\lambda_E . \tag{10.6}$$

It also follows that all curves in fig. 8 have *the point* $\lambda^* = 1$ at $\lambda_E = \left(1 - \frac{2}{3} B^2\right)^{-1}$ *in common.*

11. — Sensitivity to overall imperfections.

We shall consider the case of a sinusoidal overall imperfection

$$\psi_0(\xi) = \alpha_0 \sin \pi\xi , \tag{11.1}$$

where α_0 is positive. Inspection of the energy functional (7.4) shows that $\phi(\xi) \equiv 0$ is always a solution of the equations of equilibrium. The associated solution for the overall deflection is evidently

$$\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi = \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda}\, \alpha_0 \sin \pi\xi . \tag{11.2}$$

The second variation of the functional (7.4) for the solution just obtained is given by

$$\int \left[\delta\psi^{\cdot\cdot 2}(\xi) - \pi^2 \frac{\lambda}{\lambda_E}\, \delta\psi^{\cdot 2}(\xi) + (1 - \lambda + \pi^2 \sqrt{2}\, B\alpha \sin \pi\xi)\delta\phi^2(\xi) \right] d\xi . \tag{11.3}$$

The terms involving $\delta\psi(\xi)$ are positive definite for $\lambda < \lambda_E$, whereas the term in $\delta\phi(\xi)$ ceases to be positive definite at the value of λ defined by the equation

$$1 - \lambda + \pi^2 \sqrt{2}\, B\alpha = 1 - \lambda + \pi^2 \sqrt{2}\, B \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda}\, \alpha_0 = 0 . \tag{11.4}$$

It should be remembered here that we have assumed a negative value of B. The *critical* value of the load factor, at which (additional) local buckling occurs, is thus given by the value of $\lambda < \mathrm{Min}(\lambda_E, 1)$ which satisfies the equation

$$(1 - \lambda)(\lambda_E - \lambda) = - \pi^2 \sqrt{2}\, B\lambda\alpha_0 . \tag{11.5}$$

The load carrying capacity of the panel is not yet exhausted at the critical load factor determined by (11.5). In fact, at this critical load local

buckling starts only at the center of the bays in fig. 3 which deflect upwards, e.g. at $\xi = \frac{1}{2}$, and the zone of local buckling only spreads at a further increase of the compressive load. In order to investigate this phenomenon we have to consider the post-buckling behaviour beyond the critical value specified by (11.5).

It is now again convenient to reverse our approach to the problem. We assume the overall deflection again as $\psi(\xi) = \alpha \sin \pi\xi$, with an as yet indeterminate amplitude α, and we minimize the energy functional (7.4) for $\phi_0(\xi) \equiv 0$ and $\psi_0(\xi) = \alpha_0 \sin \pi\xi$ with respect to $\phi^2(\xi)$. The result is

$$\phi^2(\xi) = \lambda - 1 - \pi^2 \sqrt{2}\, B\alpha \sin \pi\xi\,, \tag{11.6}$$

wherever the right-hand member is positive, and $\phi^2(\xi) = 0$ elsewhere. Let (11.6) be positive for $\frac{1}{2} - \mu < \xi < \frac{1}{2} + \mu$. The energy expression (7.4) now reduces to

$$P^* = \pi^4\alpha^2 \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_E} - B^2\left(\mu + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\mu\right)\right] -$$
$$- 2\pi^4 \frac{\lambda}{\lambda_E}\alpha_0\alpha - (\lambda - 1)^2\mu + 2\pi\sqrt{2}\,(\lambda - 1)B\alpha \sin \pi\mu\,, \tag{11.7}$$

where the relationship between α and μ follows from the value zero for the right-hand member of (11.6)

$$\alpha = \frac{\lambda - 1}{\pi^2\sqrt{2}B \cos \pi\mu}\,. \tag{11.8}$$

Eliminating α by means of (11.8), expression (11.7) is reduced to

$$P^* = (\lambda - 1)^2\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}\right)\frac{1}{2B^2\cos^2 \pi\mu} + \frac{3}{2\pi}\tan \pi\mu -\right.$$
$$\left. - \mu\left(1 + \frac{1}{2\cos^2 \pi\mu}\right)\right] - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{B}(\lambda - 1)\frac{\lambda}{\lambda_E}\frac{\alpha_0}{\cos \pi\mu}\,. \tag{11.9}$$

The equilibrium values of μ at a given value of the load factor, and the associated equilibrium values of α by (11.8), are obtained by putting the partial derivative of (11.9) with respect to μ equal to zero. We obtain the equation

$$(\lambda - 1)\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_E}\right)\frac{1}{B^2} - \mu + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\mu\right] -$$
$$- \frac{\pi^2\sqrt{2}}{B}\frac{\lambda}{\lambda_E}\alpha_0 \cos \pi\mu = 0\,. \tag{11.10}$$

The solution of this equation starts with the value $\mu = 0$ at the critical bifurcation value of λ defined by (11.5). The post-buckling path defined by (11.10) and (11.8) is initially rising and stable because the derivative, obtained from (11.10),

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = -(1-\lambda)B^2\lambda_E \frac{\sin \pi\mu \left[\dfrac{\pi^3\sqrt{2}}{B}\dfrac{\lambda}{\lambda_E}\alpha_0 + 2(1-\lambda)\sin \pi\mu\right]}{(1-\lambda)^2 - \pi^2\sqrt{2}B\alpha_0 \cos \pi\mu} \tag{11.11}$$

is positive for sufficiently small positive values of μ. A critical situation may occur in the form of a *limit point* at which the solution of (11.10) leads to a zero value of the derivative (11.11). Let λ^* and μ^* denote these associated critical values of the load factor and the parameter μ. They are connected by the relations

$$\frac{\lambda^*}{\lambda_E} = 1 - B^2\left(\mu^* - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi\mu^*\right), \tag{11.12}$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_E}{\lambda^*}\frac{\sqrt{2}B}{\pi^3}(\lambda^* - 1)\sin \pi\mu^* . \tag{11.13}$$

Since $\alpha_0 > 0$, $B < 0$ and $\mu^* < 1$ a limit point can only occur by (11.13) at a critical load factor $\lambda^* < 1$. Since α would by (11.8) grow beyond all bounds when μ approaches the value $\frac{1}{2}$ at $\lambda < 1$, a limit point can only occur at $\mu^* < \frac{1}{2}$. Hence by (11.12) we must have $\lambda^* > \lambda_E(1 - \frac{1}{2}B^2)$, and in combination with $\lambda^* < 1$ we see that a *limit point can only occur for* $\lambda_E < (1 - \frac{1}{2}B^2)^{-1}$.

The parametric relationship (11.12), (11.13) between λ^* and α_0 shows the derivative $\dfrac{d\lambda^*}{d\alpha_0}$ is negative in the range where a limit load factor λ^* can occur. The smallest limit load factor λ^* is therefore determined by the value $\mu^* = \frac{1}{2}$ in (11.12), and it is given by $\lambda^*_{\min} = \lambda_E(1 - \frac{1}{2}B^2)$. The associated maximum value of α_0 which leads to a limit point λ^* is by (11.13)

$$\alpha_{0\,\max} = \frac{\sqrt{2}B}{\pi^3}\left[\lambda_E - (1 - \tfrac{1}{2}B^2)^{-1}\right]. \tag{11.14}$$

Overall imperfections in excess of the limiting value (11.14) imply a steadily rising, stable post-buckling curve, up to the value $\lambda = \lambda_E(1 - \frac{1}{2}B^2)$, without the occurrence of a limit point on this curve.

We may summarize our present results in the following way. In the presence of overall imperfections (11.1), local buckling will start at the load factor $\lambda < \min(\lambda_E, 1)$ which satisfies equation (11.5). The post-buckling path is initially always rising and stable, up to the limit value λ^*, defined by (11.12) and (11.13), if the overall imperfection parameter α_0 is less than the maximum value (11.14). Beyond this limit point the curve descends again, but it does not drop below the value $\lambda = \lambda_E(1 - \frac{1}{2}B^2)$. In the case of overall imperfections α_0 in excess of $\alpha_{0\,max}$ given by (11.14) the post-buckling curve rises monotonicly, again to the asymptotic value $\lambda = \lambda_E(1 - \frac{1}{2}B^2)$ for indefinitely increasing overall deflections.

12. — A TYPICAL AIRCRAFT WING PANEL.

In addition to the integrally stiffened Tvergaard panel [19] with a value $B^2 = \dfrac{1}{6}$, considered as an example in the previous sections, it is worthwhile to consider also a more typical aircraft wing panel with bonded stiffeners. We select van der Neut's example for a panel with top hat stiffeners [15] because it contains a complete description of the transverse profile of the local buckling mode (fig. 10). We accept for this

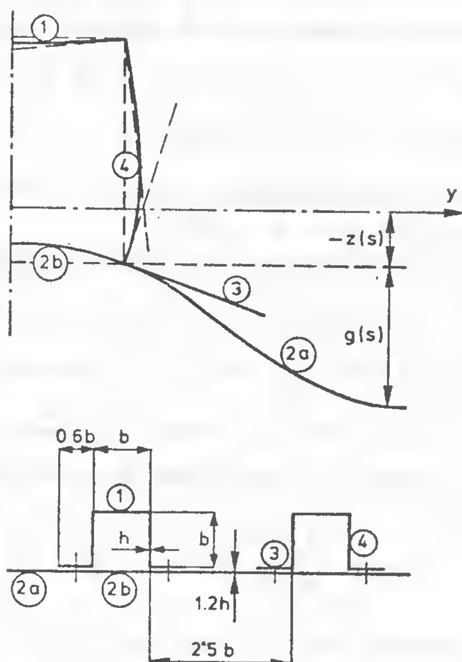


Fig. 10 – Transverse wave profile of local buckling mode in van der Neut's panel with top hat stiffeners [15].

purpose van der Neut's simplification in his analysis that the flanges of the stiffeners are rigidly connected to the plate only at the corners (cf. the local mode profile in fig. 10).

A simple numerical integration yields the significant constants (4.8), (6.17) and (6.18) in the *lower bound approximation to the post-buckling stiffness.* The numerical values in question are given by

$$\eta_c = 1 - \frac{\overline{(g^2)}^2}{\overline{g^4}} = 0.763, \tag{12.1}$$

$$B = \frac{\overline{(zg^2)}}{i\,[\overline{g^4} - \overline{(g^2)}^2]^{\frac{1}{2}}} = -\,0.347, \tag{12.2}$$

$$\eta_b = 1 - B^2 = 0.880\,. \tag{12.3}$$

The values (12.1) and (12.3) indicate that the panel in question is still quite stiff in the post-buckling range, both in compression and in bending. The associated relatively small magnitude of the constant B implies a comparatively small sensitivity to imperfections. In fact, by section 11 the load carrying capacity of the panel in the presence of overall imperfections is in the elastic range at least $\lambda_E\,(1 - \frac{1}{2}B^2)$, i.e. 94 percent of the Euler load. Likewise, in the presence of local imperfections the critical load factor is bounded below by $\lambda_E\left(1 - \dfrac{2}{3}B^2\right)$ for values of λ_E less than $\left(1 - \dfrac{2}{3}B^2\right)^{-1}$. This implies a reduction of the critical load by at most 8 percent in comparison with the Euler value. The relatively small sensitivity to imperfections, predicted by our lower bound approximation to the post-buckling stiffness, obviates the need of a more accurate calculation. Moreover, the presence of an unavoidable waviness of the plate implies an equivalent local imperfection at least equal to a few percent of the thickness, and the best possible panel at $\lambda_E = 1$ cannot have a critical stress much above $\lambda^* = 0.98$. It follows that test panels at $\lambda_E = 1$ will have a critical stress between $\lambda^* = 0.92$ and $\lambda^* = 0.98$. This relatively *narrow range* fully explains the *small scatter* observed in experiments on well-designed aircraft wing panels.

Our numerical values do not agree with van der Neut's results for the same panel [15]. Van der Neut obtained a more pronounced imperfection sensitivity. We believe that the reason for the discrepancy is to be found in additional simplifying assumptions in his analysis. Referring to fig. 10, van der Neut restricts his attention in the post-buckling range to the plate strips 1, 2a and 2b. The local buckling mode in fig. 10 is obtained with due account of the interaction of these three plate strips with the

remaining strips 3 and 4 in the cross-section. The post-buckling stiffness for each of the plate strips 1, 2a and 2b, however, is evaluated separately, on the assumption that the edge restraint against rotation remains constant in the post-buckling range. The requirement of geometric compatibility between the rotation angles at adjoining plate strips is thus ignored in his analysis, and this must result in an underestimate of the post-buckling stiffness. Moreover, the vertical webs of the stiffeners, with a rather small deflection in the local mode, actually have a stiffening effect on the flexural rigidity of the entire cross-section, and this effect is also deliberately ignored in van der Neut's analysis.

Van der Neut evaluates in his analysis the reduction factor η_b for the flexural rigidity of the perfect panel, and he obtains the value 0.658 as compared with our lower bound 0.880 by (12.3). The similar reduction factor η_c for compression is also easily calculated from van der Neut's table 2. His value is 0.547 as compared with our lower bound 0.763 by (12.1). The discrepancies are indeed quite significant.

More recently van der Neut has examined the consequences of a modification of his analysis in which the compatibility between the edge rotations of adjoining plate strips is restored [22]. His modified results for values of the parameter λ_E less than about 1.2 seem to agree well with our numerical values. A considerable discrepancy, however, is observed again for much larger values of λ_E, say $\lambda_E > 1.4$-1.5. This discrepancy may be (partially) due to shortcomings of our analysis in which changes of the local mode shape in the post-buckling range are ignored. Referring to fig. 6, our analysis is rigorously valid at the point $\lambda = 1$, $\lambda_E = (1 - B^2)^{-1}$, but the accuracy of the straight line $\lambda = \lambda_E(1 - B^2)$ is in question for values of λ_E far in excess of the value $(1 - B^2)^{-1}$ at the corner.

13. — Limitations of present theory.

The analysis in the present paper is purposely restricted to elastic behaviour of the material throughout. We realize, of course, that plastic deformations will occur in most actual panels designed for optimum load carrying capacity, but a full understanding of the panel behaviour in the elastic range is a prerequisite for an effective approach to the more difficult problem in the presence of plastic deformations. A significant first attempt in this direction has been made by Tvergaard and Needleman [21], and further developments may be expected in a not too distant future.

A further essential limitation of the present theory is that we have assumed the occurrence of a *simple* local buckling mode. In section 3 we have already indicated in (3.2) the modifications required in the description of local buckling in the case of simultaneous modes. A simple example of this type of problem occurs in the case of van Neut's model of a built-up

column in fig. 2, and the detailed analysis of this problem in [10], by methods completely similar to the present report, shows that no essential new difficulties are likely to occur.

It may be worthwhile to emphasize once again that the analysis in the present report provides a *rigorous lower bound* for the energy functional and thus an overestimate of adverse interactions between local and overall buckling in the *initial post-buckling range*, provided that the basic parameter B (6.17) does not vanish. In fact, in the case $B = 0$ all interaction disappears from the functional (7.1). In such cases we cannot evade an investigation of *modifications* of the local mode in the post-buckling range. A typical example is the rectangular thinwalled box with the special case of the square tube (fig. 1). A similar analysis of modifications of the local mode in the post-buckling range is also desirable when the *magnitude* of a non-zero value B is *small*. In such cases we should indeed expect that significant modifications of the local mode, in its interaction with the overall mode, will already occur in a fairly early stage of the post-buckling range. Such an investigation will also be worthwhile in order to ascertain up to how far in the post-buckling domain the simple analysis of the present report remains sufficiently accurate (cf. section 12).

The reader will have observed that we have not investigated the influence of combined local and overall imperfections. Our reason for this omission is that no disastrous consequences are to be feared from such combined imperfections, worse than those from imperfections of one type. Combined imperfections may lead to a limit point type of instability, but the load-deflection curve must again approach asymptotically the value $\lambda = \lambda_E\,(1 - \frac{1}{2}\,B^2)$ of the load factor. A limit point, if it does occur, must therefore exceed this asymptotic value, and our previous conclusions as to the minor influence of imperfections of a magnitude likely to occur in practice whenever the magnitude of B is relatively small, say $|\,B\,| < 0.4$, remain valid. This argument has been verified in a few cases. The analysis cannot be based on closed formulae as in the case of imperfections of a single type, and we omit details of the nummerical computations.

14. — Concluding remarks.

The detailed analysis in the present paper, and in particular its application to a more or less typical aircraft wing panel in section 12, tends to confirm the reassuring conclusion in our earlier paper [12] that *well-designed* panels, even if (relatively) highly sensitive to very small imperfections, are *comparatively insensitive to larger imperfections* such as are unavoidable in normal manufacturing processes. The " naive " optimum design of such panels ($\lambda_E = 1$) is after all, perhaps, less naive than we anticipated originally. Nevertheless, the present or a similar analysis

cannot be evaded in a justification of the " naive " point of view. It remains also to be seen whether a similar satisfying result will be obtained in a closer examination of the interaction problem in the elastic-plastic domain. In the case of steel panels where the stiffeners are welded to the plate the influence of residual stresses due to welding also merits further investigation.

Even if the sensitivity to imperfections of well-designed stiffened panels is of less significance than might be inferred from previous investigations, in particular [8], [10], [14], [15], [16], [17], a major feature of the unstable bifurcation point at or near $\lambda_E = 1$ remains unpleasant. We refer to the *violent character of the buckling phenomenon*, due to the absence of stable equilibrium configurations in the vicinity of the critical pre-buckling state. It is indeed this nearly explosive behaviour which drew our attention to a possible unstable interaction between local and overall buckling when we witnessed an ultimate load test on an aircraft wing more than twenty years ago. Fortunately, a number of reliable tests on representative compression panels were also available, and the minor scatter of these test results constituted adequate proof that safety was not impaired at loads below the design value, in spite of the violent character of the failure when it occurred. It is now clear that the explanation for the small scatter of the test results is due to the much reduced sensitivity to imperfections of a magnitude likely to occur in practice.

A further major conclusion to be drawn from the present analysis is that the conventional analysis of local buckling of stiffened panels should always be *supplemented by a calculation of the parameter B* (6.17), an upper bound for this basic quantity. This calculation is indeed a very simple matter once the transverse profile $g(s)$ of the local mode is available. A sufficiently small magnitude of the parameter B, say $|B| < 0.4$, should be adequate to ensure that geometric imperfections will not entail serious consequences in the elastic domain, provided that modifications of the local mode shape in the initial post-buckling range do not lead to significant effects. It would seem that this proviso will always be met when the reduction in compressive stiffness $(1 - \eta_c)$ is not very much larger than the reduction in fluxural rigidity $(1 - \eta_b)$. As mentioned before, the exception arises for example in the square tube of fig. 1, where $1 - \eta_c = 0.592$, whereas $1 - \eta_b = 0$.

In addition to further investigations in the elastic-plastic domain and on the influence of residual stresses in welded panels, it seems therefore that a rewarding topic for future research will be the analysis of the changes in the shape of the local buckling mode in the post-buckling range. This further analysis is a " must " in cases of a zero value of the parameter B. It is also significant for small values of $|B|$, as we have seen a desirable design objective, in particular when $(1 - \eta_c)$ is relatively large.

REFERENCES

[1] J. P. BENTHEM, *The reduction in stiffness of combinations of rectangular plates in compression after exceeding the buckling load*, N.L.L. Report S539, Amsterdam (1959).

[2] B. BUDIANSKY, *Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures*, Advances in Applied Mechanics **14**, 1-65 (1974).

[3] J. COHEN, *Symbolic and numerical computer analysis of the combined local and overall buckling of rectangular thin-walled columns*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **7**, 17-38 (1976).

[4] T. R. GRAVES SMITH, *The ultimate strength of locally buckled columns of arbitrary length*, " Thin Walled Steel Structures ", edited by K. C. Rockey and H. V. Hill, 35-60. Crosby Lockwood & Son, London (1969).

[5] W. T. KOITER, *Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht*, Thesis Delft University NASA TT F-10, 833 (1967) and AFFDL TR 70-25 (1970).

[6] W. T. KOITER, *Elastic stability and post-buckling behaviour*, Proc. Symp. Nonlinear Problems, 257-275, University of Wisconsin Press, Madison (1963).

[7] W. T. KOITER, *The effective width at loads far in excess of the critical load for various boundary conditions* (in Dutch with English summary), N.L.L. Report S287, Amsterdam (1943).

[8] W. T. KOITER, *Introduction to the post-buckling behaviour of flat plates*, " Colloque sur le comportement postcritique des plaques utilisées en construction métallique ", edited by F. Campus and Ch. Massonnet. Mem. de la Soc. Roy. des Sci. de Liège, 5me série, tome VIII, fasc. 5, 17-35 (1963).

[9] W. T. KOITER, M. SKALOUD, Interventions at " Colloque International sur le Comportement Postcritique des Plaques Utilisées en Constructions Métalliques ", edited by F. Campus et Ch. Massonnet, Mém. Soc. Roy. des Sciences de Liège, 5me série, tome VIII, fasc. 5, 64-68, 103, 104 (1963).

[10] W. T. KOITER and G. D. C. KUIKEN, *The interaction between local buckling and overall buckling on the behaviour of built-up columns*, WTHD Report 23, Delft (1971).

[11] W. T. KOITER, *Current trends in the theory of buckling*, Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures, Harvard University (1974), 1-16, Springer-Verlag (1976).

[12] W. T. KOITER and M. PIGNATARO, *An alternative approach to the interaction between local and overall buckling in stiffened panels*, Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures, Harvard University (1974), 133 - 148. Springer-Verlag (1976).

[13] K. MARGUERRE and E. TREFFTZ, *Ueber die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Ueberschreiten der Beullast*, Zeitschr. angew. Math. Mech. **17** (1937), 85-100.

[14] J. J. MEIJER and A. VAN DER NEUT, *The interaction of local buckling and column failure of imperfect thin-walled compression members*, Rep. VTH 160 (1970).

[15] A. VAN DER NEUT, *Mode interaction with stiffened panels*, Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures, Harvard University (1974), 117-132, Springer-Verlag (1976).

[16] A. VAN DER NEUT, *The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members*, Proc. 12th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., 389-399, Springer-Verlag (1969).

[17] A. VAN DER NEUT, *The sensitivity of thin-walled compression members to column axis imperfections*, Int. Journ. Solids and Structures **9**, 999-1011 (1973).

[18] A. van der Neut, *The local instability of compression members built up from flat plates,* " C. B. Biezeno Anniversary Volume on Applied Mechanics ", 174-197, H. Stam, Haarlem (1953).

[19] V. Tvergaard, *Imperfection-sensitivity of a wide integrally stiffened panel under compression,* Int. Journ. Solids and Structures **9**, 177-192 (1973).

[20] W. H. Wittrick, *Rationalization of anisotropic buckling problems,* " Contributions to the Theory of Aircraft Structures ", 359-377. Delft University Press (1972).

[21] V. Tvergaard and A. Needleman, *Mode interaction in an excentrically stiffened elastic-plastic panel under compression,* Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures, Harvard University (1974), 160-171, Springer-Verlag (1976).

[22] A. van der Neut, Private communication (June 1975).

J. A. KÖNIG (*) and G. MAIER (**)

Adaptation of rigid-work-hardening discrete structures subjected to load and temperature cycles and second-order geometric effects (***).

Summary. — *W. Prager has recently introduced the notion of rigid-plastic shakedown. The present paper gives: (1) an extension of Prager's shakedown theorem to the general case of discrete structures and for a broader class of hardening rules, with temperature and geometric effects included; (2) two different methods of bounding maximum shakedown deflections.*

The results obtained turn out to be a nontrivial analogy of the elastoplastic shakedown theory. Essential differences occur because there is no direct relationship between plastic deformations and residual stresses in the case of rigid-plastic structures.

1. — Introduction.

In a recent paper [1] W. Prager proposed the notion of " Bauschinger adaptation ", which can be defined as follows. A structure whose material is idealized as rigid-plastic with kinematic hardening is subjected repeatedly, an unlimited number of times, to a set of alternative loadings in arbitrary sequence. It is said to " adapt itself " to the loads if the plastic deformation eventually ceases. This adaptation or shakedown is brought about by the Bauschinger effect, in contrast to the shakedown of elastic perfectly plastic structures, which is due to self-stresses generated by plastic strains.

Referring to trusses and trusslike structures, Prager gave a condition for the above kind of adaptation [1] which is analogous to the classical theorem of Melan. A generalization of Prager's results to a broader class of hardening rules and an inadaptation theorem analogous to that of Koiter for elastic-plastic inadaptation, were obtained by Polizzotto [2].

(*) Polish Academy of Sciences, Warsaw.

(**) Politecnico di Milano.

(***) This paper is publisbed also in " Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering ", vol. 8 (1976).

The role of hardening in elastic-plastic shakedown was discussed in some extensions of the classical theory [3], [4], [5]. However, a rigid-hardening material model may provide considerable simplification of the analysis. It appears to be a reasonable and useful approximation whenever plastic strains prevail over the elastic ones or if strain-hardening represents the main feature of the structural response. In practical engineering situations the assessment of safety based merely on adaptation checks is often unsufficient and unreliable. In fact, even if the structure is ascertained to adapt itself, it may undergo local failure because of limited yielding capacity of components, or it may become eventually unserviceable because of excessive deflections (which, on the other hand, may impair the validity of the adaptation analysis founded on a first-order theory).

Therefore, in elastoplastic shakedown theory, deformation bounding techniques have recently been developed at various levels of generality (see e.g. [5], [6], [7]).

The main purpose of this paper is to establish upper bounds on deformations of rigid-plastic systems which adapt themselves to variable repeated loads because of their strain-hardening behavior. We consider discrete structures (such as trusses, lumped-compliance models, finite element models of continua) and assume piecewise linear yield conditions and hardening rules. On the basis of this twofold discretization the theoretical developments can be carried out in compact algebraic terms, and the relevant numerical procedures can be reduced to well-known techniques of mathematical programming.

In many engineering situations, particularly in nuclear technology, repeated temperature changes in an unknown sequence have to be taken into account. However, in rigid-plastic models the thermal and elastic deformations can be neglected since they are both of the same order of magnitude in real elastoplastic structures. In this paper, the temperature influence will therefore be solely the thermal variations of yield limits.

Second-order geometric effects will be allowed for in the sense that the variable ("transversal") loads are thought of as acting in the presence of constant ("axial") loads whose relevant stresses (calculated or estimated) intervene linearly in the equilibrium equations, as do the displacements. A wide class of hardening rules is covered, not only of kinematic nature and not necessarily complying with Drucker's stability postulate. However, the results achieved turn out to be subjected to an overall (rather than local) stability condition (sec. 2). On this basis, substancially more general than in [1] and [2], sufficient and necessary conditions for work-hardening adaptation are derived (sec. 3) and used in formulating the calculation of the safety factor with respect to inadaptation as a linear programming problem (sec. 4). A kind of deformation-bounding method,

called " direct " and established in sec. 6, rests on the energy inequalities employed in the proof of the adaptation theorem. A second " indirect " type of bounding method (sec. 7) makes use of the " dummy load " notion as in [8] and [9]. The upper bounds established by both approaches can be optimized via mathematical programming. It is worth stressing that information on deformations after shakedown can only be obtained by tracing them along the loading path. This is generally a difficult task; moreover, it is impossible in the present context, where the loading sequence is realistically assumed as not known beforehand.

2. — Problem formulation.

Structures referred to in this paper will be considered as assemblies of a number (say m) of structural components or finite elements.

Let $\boldsymbol{p}^i$ and $\boldsymbol{Q}^i$ denote vectors of c (generalised) plastic strains and c corresponding stresses of element i. They correspond to each other in the sense that $(\boldsymbol{Q}^i)^t\dot{\boldsymbol{p}}^i$ represents the dissipation rate in the element, where the dot marks the time derivative, and $\boldsymbol{Q}^i$ and $\boldsymbol{p}^i$ are treated as independent intrinsic quantities — i.e. the c components p^i_r are unaffected by rigid body motions, while components Q^i_r are self-equilibrated. This notion is clarified in fig. 1, where a truss (pin-ended) element, a plastic hinge ($c = 1$)

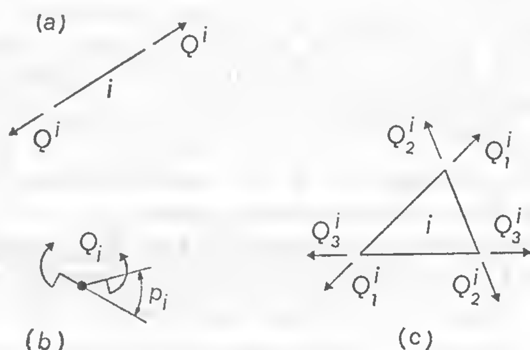


Fig. 1.

and a constant strain triangle finite element (in plane strain or stress, $c = 3$) are shown. A rigid hardening element behavior, with piecewise linear yield surfaces in the $\boldsymbol{Q}^i$ space, is described by the following set of relations (fig. 2):

$$\boldsymbol{\varphi}^i = (\boldsymbol{N}^i)^t\boldsymbol{Q}^i - \boldsymbol{H}^i\boldsymbol{\lambda}^i - \boldsymbol{k}^i \leq \boldsymbol{o}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{N}^i\boldsymbol{\lambda}^i, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^i \geq \boldsymbol{o}, \tag{2.3}$$

$$(\boldsymbol{\varphi}^i)^t\boldsymbol{\lambda}^i = 0. \tag{2.4}$$

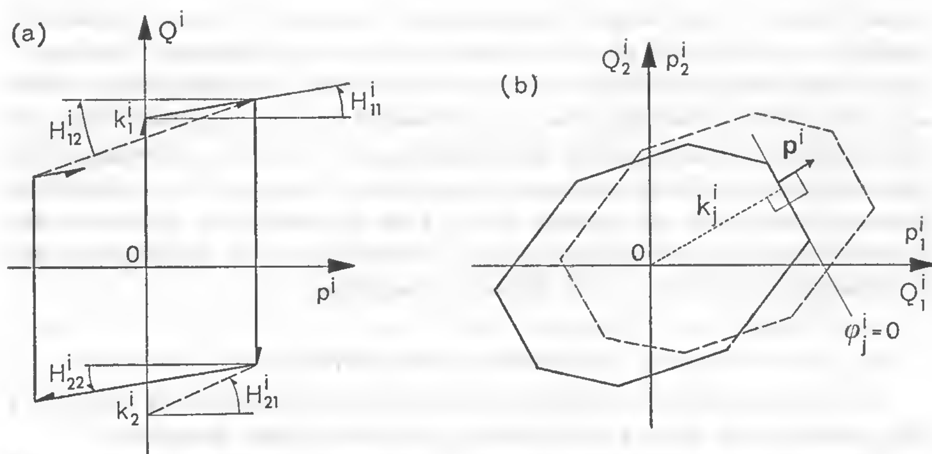


Fig. 2.

(inequality $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ between vectors means inequality $a_j \leq b_j$ between all pairs of corresponding components).

Eq. (2.1) defines the vector of the y yield functions as linear functions of $\boldsymbol{Q}^i$ and of the y-vector $\boldsymbol{\lambda}^i$ of plastic multipliers; these nondecreasing functions of time depend on the previous history of plastic deformations and can be regarded as measures of the total plastic flow for each of the y yielding modes of the element; $\boldsymbol{k}^i$ is a vector of positive constants (initial yield limits), $\boldsymbol{N}^i$ and $\boldsymbol{H}^i$ are constant matrices. The inequality (2.1) defines the piecewise linear (polyhedral) yield locus at any instant t.

Eq. (2.2) specifies that the plastic strain vector at any instant is a linear combination (through $\boldsymbol{\lambda}^i$) of the outward normal vectors to the faces of the yield locus (yield planes or modes).

Eq. (2.4), along with inequalities (2.1) and (2.2), implies $\varphi^i_j \lambda^i_j = 0$ for any mode j ($j = 1 \ldots y$) and hence selects as potentially active at any t only the y' yield planes which contain the current stress point $\boldsymbol{Q}^i$ ($\varphi^i_j = 0$ for $j = 1 \ldots y'$). Normality (in the generalised sense at corners) of $\boldsymbol{p}$ to the yield surface in thus ensured.

The work-hardening matrix $\boldsymbol{H}^i$ governs the changes of the yield locus (by translations of yield planes) due to plastic flow. Many hardening rules may be implemented by suitable choice of $\boldsymbol{H}^i$ [3]: e.g. Koiter's rule of noninteracting yield modes corresponds to $\boldsymbol{H}^i \equiv \mathrm{diag}[H^i_j]$, and Prager's kinematic hardening corresponds to $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{N}$, with H a positive scalar.

It can thus be said that, through linearization of yield functions if necessary, most rigid-plastic laws for a single element i can be described by the set of relations (2.1)-(2.4).

Let $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\varphi}$ and $\boldsymbol{\lambda}$ denote vectors formed by collecting, in the same order, the vectors $\boldsymbol{p}^i$, $\boldsymbol{Q}^i$ and $\boldsymbol{\varphi}^i$ and $\boldsymbol{\lambda}^i$, respectively, pertaining to all

(say m) elements or structural members which form the structure under consideration ($i = 1 \ldots m$).

If one defines, accordingly, the block-diagonal matrices $\boldsymbol{N} \equiv \text{diag}[\boldsymbol{N}^i]$ and $\boldsymbol{H} \equiv \text{diag}[\boldsymbol{H}^i]$, the relations (2.1)-(2.4) can be condensed into a single set of relations for all elements, and we have

$$\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{k}, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{\lambda}},\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{o}, \tag{2.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t(\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{k}) = 0. \tag{2.7}$$

If the configuration changes of the structure can be regarded as small, the strain vector $\boldsymbol{p}$ is related *linearly* to the (free) nodal displacement vector $\boldsymbol{u}$ (of n components, say), and we have

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}. \tag{2.8}$$

The $m \times n$ compatibility matrix $\boldsymbol{C}$ is supposed to have rank n, i.e. no rigid body motions are possible in the assembled structure. The equilibrium equation, allowing for second-order geometric effects, reads

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(t), \tag{2.9}$$

where $\boldsymbol{F}(t)$ denotes the vector of all independent load components, $\boldsymbol{G}$ is the geometric stiffness matrix, which contains linearly a preexisting stress state $\overline{\boldsymbol{Q}}$. This stress state is rigorously constant in a limited set of situations, such as in the beam-column of fig. 3, modelled according to the rigid-

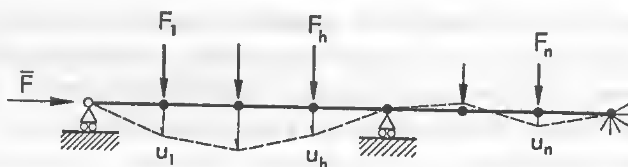


Fig. 3.

hardening hinge notion and subjected to a constant axial load $\overline{\boldsymbol{F}}$. In most cases the preexisting stresses $\overline{\boldsymbol{Q}}$ can be only estimated. In the presence of $\overline{\boldsymbol{Q}}$, the above vector $\boldsymbol{Q}$ represents merely additional stresses due to the variable ("transversal") loads; they are vectorially added to $\overline{\boldsymbol{Q}}$ so that the yield limits in eq. (2.5) become

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{N}^t\overline{\boldsymbol{Q}}, \tag{2.10}$$

$\boldsymbol{k}_0$ being the original yield limits. Despite these limitations, eq. (2.9) still provides a meaningful, although approximate, allowance for geometric effects on the structural response.

Besides the loads $\boldsymbol{F}(t)$ the external actions to be considered will include the temperature changes $\boldsymbol{\upsilon}(t)$. The temperature is assumed to be defined by a single scalar ν^i in each element (hence the vector $\boldsymbol{\upsilon}$ has m components, where m is the number of elements). It is supposed, moreover, to affect only the original yield limits $k_0^i(\nu^i)$. It is worth noting that neglecting thermal strains is consistent with the rigid-plastic idealization, where elastic strains are also regarded as negligible compared to plastic strains. The information usually available on the external actions consists of a domain $\boldsymbol{\Delta}$ defined in their space, such that load and temperature combinations corresponding to points in $\boldsymbol{\Delta}$ represent situations attainable any number of times in an unknown time sequence.

In subsequent sections three basic questions concerning the above discrete mechanical systems will be answered: (a) under which conditions does adaptation occur for a given domain $\boldsymbol{\Delta}$? (b) what is the amplification of $\boldsymbol{\Delta}$ (or safety factor) beyond which adaptation no longer occurs? (c) how is a bound to be determined the above linear consequences (such as deflections) of plastic deformations developed before adaptation, when this is guaranteed to occur?

3. — Preliminary remarks.

The following remarks represent useful preliminaries to the subsequent developments.

(*a*) The equation

$$\boldsymbol{F}^t\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}' \tag{3.1}$$

holds for any sets of compatible quantities (primed) and of (unprimed) quantities pertaining to an actual static process without need of causality relations between the two sets. This can be justified by means of eqs. (2.8)-(2.9). For $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{o}$ eq. (3.1) reduces to a customary virtual work equation.

(*b*) By substituting eq. (2.6) into (2.8) and premultiplying both sides by the matrix $\boldsymbol{C}^t$, one obtains

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\lambda}, \qquad \text{where } \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{N}. \tag{3.2}$$

Since $\boldsymbol{C}$ is full-column rank, the matric $\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{C}$ is nonsingular; hence, eq. (3.2) is justified and uniquely defines a deformed configuration $\boldsymbol{u}$ for any (even not compatible) set of plastic deformations $\boldsymbol{\lambda}$. In this sense displacements $\boldsymbol{u}$ "consequent" to some $\boldsymbol{\lambda}$ will be referred to later.

(*c*) The following hypothesis will be adopted in various subsequent developments:

$$\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D}^t\boldsymbol{G}\boldsymbol{D} \text{ is symmetric and positive semidefinite.} \tag{3.3}$$

Since $\boldsymbol{G}^t = \boldsymbol{G}$, the required symmetry of $\boldsymbol{E}$ implies symmetry of $\boldsymbol{H}$ and hence imposes a restriction on the class of hardening rules. The positive

definiteness requirement is readily seen to represent a sufficient condition for overall stability. In fact, consider the second-order work (to within δt^2) performed to generate an arbitrary geometric disturbance. Then, with (3.1),

$$\dot{F}^t\dot{u} = \dot{Q}^t\dot{p} + \dot{u}^t G\dot{u}. \tag{3.4}$$

Because of eq. (2.4), $\dot{\lambda}_j^i = 0$ for any j for which $\varphi_j^i < 0$; moreover, plastic flow ($\dot{\lambda}_j^i > 0$) and " local unloading " ($\dot{\varphi}_j^i < 0$) cannot occur simultaneously for the same yielding mode j in the same element i. Therefore, one may write, as an aspect of the flow rules,

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \tag{3.5}$$

If eqs. (2.1)-(2.2) are differentiated with respect to time (without varying temperature), we obtain from (3.5)

$$\dot{p}^t\dot{Q} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t H\dot{\boldsymbol{\lambda}}. \tag{3.6}$$

Hence, by (3.4),

$$\dot{F}^t\dot{u} \equiv \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t H\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \dot{u}^t G\dot{u}. \tag{3.7}$$

This equation, combined with (3.2), shows that hypothesis (3.3) ensures overall stability (in Drucker's sense) whatever set of yielding modes may be active. It is worth noting that (3.3) may be valid even with $\boldsymbol{H}$ indefinite (i.e. even in the presence of strain-softening behaviour), provided that material instability be compensated for by geometric stabilizing effects ($\boldsymbol{G}$ positive definite, as with tensile axial load F in the column-beam of fig. 3).

4. — Generalized Prager theorem on work-hardening adaptation.

The theorem stated and proved below represents a generalisation of results contained in [1] and [2] to temperature changes, to second-order geometric effects and to the broad class of hardening rules defined in sec. 2.

Theorem 1. — If there esist a time-independent plastic multiplier vector $\boldsymbol{\lambda}^*$ (and " consequent " displacements $\boldsymbol{u}^*$) and a set of stress vectors $\boldsymbol{Q}^*$ such that, for all loading conditions belonging to the given load domain (for any instant t), (a) equilibrium holds:

$$C^t Q^* + Gu^*(\boldsymbol{\lambda}^*) = F(t), \tag{4.1}$$

and (b) the yield conditions are fulfilled:

$$N^t Q^* - H\boldsymbol{\lambda}^* < k(t), \tag{4.2}$$

then work-hardening adaptation will occur.

Proof. Consider the following function (which is nonnegative because of the assumptions of sec. 2):

$$L \equiv 1/2(\boldsymbol{\lambda}^t - \boldsymbol{\lambda}^{*t})E(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*). \tag{4.3}$$

For $\boldsymbol{\lambda}$ defining actual, compatible strains, eq. (3.2) supplies the corresponding actual displacements. In fact, (3.2) becomes an identity if (2.6)-(2.8) are substituted into it.

Since, by hypothesis (3.3), $\boldsymbol{H}^t = \boldsymbol{H}$, we have

$$\dot{L} = (\boldsymbol{\lambda}^t - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{*t})\boldsymbol{E}\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}^t - \boldsymbol{\lambda}^{*t})\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + (\boldsymbol{u}^t - \boldsymbol{u}^{*t})\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{u}}. \tag{4.4}$$

By the principle of virtual work (3.1) we have

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}^t(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^*) + \dot{\boldsymbol{u}}^t\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*) = 0, \tag{4.5}$$

provided that $\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{u}$ represent actual stresses and displacements, respectively, and $\boldsymbol{Q}^*$ denotes stresses in equilibrium with the *same* loads.

On the basis of the constitutive law (2.4) and of eq. (4.2), and since $\dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{o}$, one obtains

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q} = \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{k}), \tag{4.6}$$

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^* \geq \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}^* + \boldsymbol{k}). \tag{4.7}$$

By adding eqs. (4.7) and (4.6) we obtain

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}^t(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^*), \tag{4.8}$$

whence, by eqs. (4.4) and (4.5),

$$\dot{L} \leq 0. \tag{4.9}$$

If the inequality (4.2) holds, then some scalar $\beta > 1$ exists such that

$$\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^* \leq \boldsymbol{N}\boldsymbol{\lambda}^* + \boldsymbol{k}/\beta. \tag{4.10}$$

By substracting eq. (4.6) from (4.10) premultiplied by $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, we obtain

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^*) - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) - \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{k}(1 - 1/\beta) \geq 0. \tag{4.11}$$

Therefore, by eqs. (4.5) and (4.4),

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) + \dot{\boldsymbol{u}}^t\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*) + \boldsymbol{k}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\beta - 1)/\beta \leq 0, \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{k}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}} \leq \dot{L}\beta/(1 - \beta). \tag{4.13}$$

Hence, with eq. (4.3),

$$\int_0^\infty \boldsymbol{k}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}}\,dt \leq \frac{\beta}{\beta - 1}[L(0) - L(\infty)] \leq \frac{\beta}{\beta - 1}L(0) = \frac{\beta}{\beta - 1}\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{*t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\lambda}^*. \tag{4.14}$$

This shows that each component of $\boldsymbol{\lambda}$ and, therefore, the whole dissipated work is bounded in time, i.e. adaptation does occur. Q.E.D.

THEOREM 2. — If adaptation occurs, then there exist a time-independent plastic multiplier vector $\boldsymbol{\lambda}^*$ (and "consequent" displacements $\boldsymbol{u}^*$) and stresses $\boldsymbol{Q}^*$ such that, for all loads of the given domain, equilibrium eq. (4.1)

and the yield inequality (4.2) hold, the latter in the weak sense (less *or equal*).

Proof. As its counterpart in classical, elastoplastic shakedown theory, this converse theorem is readily justified by referring to the actual residual deformations and stresses after adaptation.

5. — Calculation of the safety factor.

Let a "load factor" $\alpha \geq 0$ be assumed as a multiplier of the vectors $\boldsymbol{F}_0(t)$ and $\boldsymbol{\upsilon}_0(t)$, i.e. as an amplifier of the given domain Δ_0 of external actions, so that $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0\alpha$ and $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_0\alpha$. The maximum of all α for which adaptation occurs will be called, as usual, the safety factor s with respect to inadaptation.

On the basis of statement 2, sec. 4, for all $\alpha \leq s$ the following set of relations must be fulfilled at any t:

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\lambda}^*) = \boldsymbol{F}_0(t), \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}^* \leq \boldsymbol{k}(t,\alpha). \tag{5.2}$$

On the basis of theorem 1, the above set of relations guarantees adaptation if inequality (5.2) holds as a strong inequality. However, the safety factor is stable with respect to perturbations of the yield limits; therefore, by a customary argument, the weak inequality (5.2) fulfilled for all t, together with eq. (5.1), does represent a sufficient condition for shakedown.

The domain Δ of external actions will be assumed to be a (hyper-)polyhedron in the space of their components, i.e. it will be defined by linear inequalities such as:

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \\ \boldsymbol{\upsilon}\end{bmatrix} \leq \alpha\boldsymbol{a}. \tag{5.3}$$

$\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{a}$ denoting a constant matrix and a constant vector, respectively. Moreover, the yield limits will be assumed to depend *linearly* on the temperature, i.e.

$$\boldsymbol{k} = \overline{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\upsilon}, \tag{5.4}$$

where $\overline{\boldsymbol{k}}$ are the yield limits at normal room temperature, and $\boldsymbol{\Theta}$ represents a given block-diagonal matrix of constant vectors $\boldsymbol{\Theta}^i$.

The above two hypotheses provide significant computational simplifications, as will be seen later. The former is clearly acceptable whenever the domain $\boldsymbol{\Delta}$ is convex. The latter may be justified only for moderate temperature variations.

It is convenient to express the stress vector $\boldsymbol{Q}^*$ as the sum of two terms: (1) a stress vector due to the "transversal" loads in a primary, isostatic structure (subjected to the "axial" loads $\overline{\boldsymbol{F}}$) and (2) a stress vector $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R}$ due to redun-

dants $\boldsymbol{R}$ which are thought of as acting on the same primary structure in the absence of $\bar{\boldsymbol{F}}$. Thus the equilibrium equation (5.1) can be replaced by

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{B}[\alpha\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\lambda}^*)] + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{R}, \tag{5.5}$$

where $\boldsymbol{B}$ denotes a matrix such that $\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$ represents a particular solution of the equation $\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}$, and $\boldsymbol{B}'$ indicates a matrix such that $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R}$ represents the general solution of $\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{x}$ being a variable vector.

By the substitution of eqs. (5.5), (5.4) and (3.2) into (5.2), the shakedown condition becomes

$$\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R} - \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}^* \leq \boldsymbol{k} - (\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\upsilon}_0)\alpha. \tag{5.6}$$

Let $\boldsymbol{M}$ be the vector ("envelope vector") of the maximum values attained by the components of the vector in parenthesis in eq. (5.6) as the external actions vary in time within the prescribed domain Δ_0. In symbols:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{M} \equiv \max \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\upsilon}, \\ \text{subject to: } \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \\ \boldsymbol{\upsilon}\end{bmatrix} \leq \boldsymbol{a}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

The maximization (5.7) applies *componentwise*, i.e. (5.7) represents a set of linear programming problems, one for each component M_j^i (for element i and each yielding plane j).

In many cases the mechanical and thermal loads are independent of each other; i.e. the matrix $\boldsymbol{A}$ is block-diagonal, so that some constraints concern $\boldsymbol{F}$ alone and the others $\boldsymbol{\upsilon}$ alone. The problem (5.7) may be subdivided into two phases:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_F - \boldsymbol{M}_\vartheta, \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{M}_f = \max \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{A}_F\boldsymbol{F} \leq \boldsymbol{a}_F, \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{M}_\vartheta \equiv \max \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\upsilon}, \qquad \boldsymbol{A}_\vartheta\boldsymbol{\upsilon} \leq \boldsymbol{a}_0. \tag{5.10}$$

If the domain Δ is not convex (as when some external actions exclude each other), the notion of envelope vector $\boldsymbol{M}$ still applies and can be evaluated a priori, but maximizing over a domain Δ is defined differently than in (5.7). After the envelope vector $\boldsymbol{M}$ has been calculated, the determination of the safety factor s reduces to the linear programming problem

$$\begin{gathered} s = \max \alpha, \\ \text{subject to: } \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\lambda}^* + \boldsymbol{M}\alpha \leq \boldsymbol{k}_0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

6. — Direct bounding methods.

Let the scalar γ denote a linear consequence of the vector $\boldsymbol{\lambda}$ which defines a distribution of platic strains after adaptation:

$$\gamma = \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\lambda}. \tag{6.1}$$

Now γ is a displacement component u_h; then $\boldsymbol{c}^t$ is the corresponding row of the matrix $\boldsymbol{D}$ (3.2). Alternatively, γ may represent a strain component p^i in element i, then $\boldsymbol{c}^t$ is the corresponding row of the matrix $\boldsymbol{N}$ (2.6); or γ may coincide with a component λ_j^i, i.e. with the measure of the total plastic flow at the yielding mode j of element i.

Suppose that one knows the time history of external actions $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{\upsilon}(t)$. Then the value γ might be obtained by integrating in time the whole set of governing relations (2.5)–(2.9) and (3.5), rewritten here for convenience:

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{N}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}, \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{o}, \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{o}, \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0. \tag{6.4}$$

If it is known that adaptation occurs, i.e. that the system admits a safety factor $s > 1$, then the first inequality in (4.14) holds. Hence, assuming $\beta = s$ and using (4.3), we may write

$$\frac{s-1}{s}\int_0^\infty \boldsymbol{k}^t\dot{\boldsymbol{\lambda}}\,dt \leq \frac{1}{2}\,\lambda^{*t}\boldsymbol{E}\lambda^* - \frac{1}{2}(\lambda^t - \lambda^{*t}), \tag{6.5}$$

$\boldsymbol{\lambda}^*$ being any vector which satisfies the constraints (4.1) and (4.10):

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\lambda}^*) = \boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}^* \leq \boldsymbol{k}/s. \tag{6.6}$$

In the present context it is realistically assumed that the only available information on the external actions is the domain Δ (not the time sequence). Then an upper bound on γ could in principle be achieved by maximizing $\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{\lambda}$ subject to the constraints (6.2)–(6.4) and over the whole set of time sequences in the given domain Δ. This would be an optimal control problem, in which inequality (6.5) would represent an inactive constraint, since it is a consequence of the others.

The above maximization becomes an algebraic, nonlinear programming problem if its constraints are relaxed as follows: constraints (6.4), which contain time-derivatives, are dropped; the sign requirement applies to $\boldsymbol{\lambda}$ instead of $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$; the integral on the left side of (6.5) is replaced by $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{k}_M$ being obtained by minimizing componentwise:

$$\boldsymbol{k}_M \equiv \min \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\upsilon}), \quad \text{subject to: } \boldsymbol{\upsilon} \in \Delta. \tag{6.7}$$

In the new maximization problem with relaxed constraints an upper bound on γ is still achieved, since the domain over which the maximization is performed was enlarged. Constraint (6.5) will be generally active, as it does not follow from the other remaining constraints.

The variability of the external actions can be allowed for in a preliminary calculation leading to the envelope vector $\boldsymbol{M}$ (sec. 5). Thus the above nonlinear programming problem leading to an upper bound U on γ reads as follows:

$$U = \max \boldsymbol{c\lambda}, \tag{6.8}$$

subject to:

$$\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{BGD})\boldsymbol{\lambda} \leq \bar{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{M}, \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{N\lambda} = \boldsymbol{Cu}, \qquad \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{o}, \tag{6.10}$$

$$\frac{s-1}{s}\, \boldsymbol{k}_M^t\boldsymbol{\lambda} \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{E\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{E\lambda}^*. \tag{6.11}$$

Using the notion of envelope vector in the constraints (6.6) for $\boldsymbol{\lambda}^*$, these become:

$$\boldsymbol{NB}'\boldsymbol{R}^* - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{BGD})\boldsymbol{\lambda}^* \leq \bar{\boldsymbol{k}}/s - \boldsymbol{M}^*, \tag{6.12}$$

where $\boldsymbol{M}^*$ is calculated as $\boldsymbol{M}$ in (5.7), but with $\boldsymbol{\Theta}/s$ instead of $\boldsymbol{\Theta}$.

Let the second, nonpositive term on the righthand side of eq. (6.5) be dropped. Then, instead of (6.11), the following less resctictive inequality is arrived at:

$$\frac{s-1}{s}\, \boldsymbol{k}_M^t\boldsymbol{\lambda} \leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{*t}\boldsymbol{E\lambda}^*. \tag{6.13}$$

If this linear constraint replaces the quadratic (6.11), the above optimization problem with respect to $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{u}$ becomes a *linear* program. It supplies a (generally worse) upper bound $U' \geq U$ which can be optimized with respect to $\boldsymbol{\lambda}^*$. In fact, $\boldsymbol{\lambda}^*$ now intervenes only in the positive semidefinite quadratic form of (6.13); this can be *a priori* minimized under the linear constraints (6.12), i.e. by solving a *quadratic* programming problem.

A further simplification, at the cost of poorer bounds, can be clearly achieved by ignoring the compatibility constraints in (6.10). Other variants of the bounding method outlined above (resting on a sequence quadratic-linear programming) can be established, as e.g. in [5], and may be of computational value.

7. — Indirect bounding method.

Consider a *constant* fictitious (dummy) load set $\boldsymbol{T}$ such that $\boldsymbol{T}^t\boldsymbol{u} \equiv \gamma$ represents a measure of the deflection to be bounded (e.g. $T_h = 1$, $T_k = 0$ for $k \neq h$). Let $\boldsymbol{Q}^T$ denote a stress state in equilibrium with $\eta\boldsymbol{T}$ (in the undeformed configuration), η being a positive scalar:

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{T}\eta. \tag{7.1}$$

For a given domain Δ of external actions $\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\upsilon}(t)$, assume constant plastic multipliers $\boldsymbol{\lambda}^*$, the consequent displacements $\boldsymbol{u}^*$ and a stress vector $\boldsymbol{Q}^*$ such that, for any t,

$$\boldsymbol{N}^t(\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{Q}^T) - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda}^* \leq \boldsymbol{k}(t), \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{F}(t). \tag{7.3}$$

Premultiply eq. (7.2) by the actual $\boldsymbol{\lambda}$ at the same t, change the sign and add eq. (4.6), as in sec. 4. Thus,

$$\boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*) \leq \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}^T. \tag{7.4}$$

It follows from eq. (4.5) and (4.4) that

$$-\dot{L} \geq \dot{\boldsymbol{\lambda}}^t\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^T = \dot{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{Q}^T. \tag{7.5}$$

By applying the virtual work principle to $(\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{u}})$ and $(\boldsymbol{Q}^T, \boldsymbol{T})$, and by integrating in time, and taking account of the symmetry of $\boldsymbol{E}$, we obtain

$$-L(\infty) + L(0) \geq \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{T}\eta. \tag{7.6}$$

Since $\boldsymbol{E}$ is positive semidefinite by hypothesis (3.3), $L(\infty)$ may be dropped in (7.6). Thus the upper bound on γ becomes

$$\gamma \leq \frac{1}{\eta}\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{*t}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\lambda}^*. \tag{7.7}$$

Making use of the envelope vector $\boldsymbol{M}$, we write the constraints (7.2)–(7.3) as follows:

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\lambda}^* + \eta\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{Q}^T \leq \bar{\boldsymbol{k}}. \tag{7.8}$$

Analogous to (5.5) the equilibrium condition (7.1) can be expressed as

$$\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\eta + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{R}. \tag{7.9}$$

By substituting eq. (7.9) into (7.8), we obtain

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}'\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\lambda}^* + \eta\boldsymbol{N}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} \leq \bar{\boldsymbol{k}}. \tag{7.10}$$

The upper bound (7.7) can be minimized subject to the condition (7.10): this is a nonlinear programming problem with linear constraints only, a quadratic programming problem if the scaling factor η is assumed.

A meaningful variant of the indirect ("dummy load") approach might be derived as a counterpart in the present context of the procedure developed in [10] for perfectly plastic structures.

8. — Concluding remarks.

In this paper an attempt was made to develop the main concepts of a fairly general theory of rigid-work-hardening adaptation under an unknown

sequence of variable external actions. The theory covers temperature and second-order geometric effects and a class of hardening rules; it is based, however, on a category of discrete structural models. The main concept includes necessary and sufficient conditions for adaptation, a procedure for evaluating the safety factor, and deformation bounding techniques.

From the theoretical standpoint the present results display much similarity to but also substancial differences from elastoplastic shakedown theory. Of course, the differences stem mainly from the lack of connection between plastic strains and residual stresses, which is implied by the rigid-plastic idealization.

From the computational standpoint, the rigid-plastic behavior model provides significant simplifications, as equilibrium and yield conditions alone play a role in the preliminary calculation of the envelope vector, and complete stress solutions (also compatible) are not required, in contrast to elastoplastic shakedown analysis.

From the engineering point of view, whether and when the rigid-plastic idealization is advantageous has still to be assessed. It should be noted that the rigid-perfectly plastic idealization would imply trivially the coincidence of static collapse and inadaptation loci for any structure and, therefore, would represent an approximation on the unsafe side, as far as the safety factor is concerned. An analogous remark can be made on the effects of the geometry change, which are generally underrated in rigid-plastic models.

As emphasized in the introduction, the determination of the safety factor s against inadaptation is not a satisfactory result of shakedown analysis, neither in the elastoplastic nor in the rigid-plastic context. In fact, it is very sensitive to the choice of the hardening rules (e.g. $s = \infty$ for Koiter's hardening); moreover it is often on the unsafe side. Therefore, deformation bounds represent important information. It is worth noting that the indirect methods (sec. 7), in contrast to the direct ones (sec. 6), are not capable of providing upper bounds on individual components of the vector $\boldsymbol{\lambda}$, i.e. on measures of the total plastic flow with respect to a single yielding mode. The indirect method can be straightforwardly extended to continua. On the other hand the direct methods can hardly be used, or even formulated, without a suitable discretization of both structure and yield conditions. Therefore the discrete approach was adopted for the present theory. Other reasons are that the matrix approach permits a simple treatment of geometric effects; moreover, it leads directly to algebraic formulations suitable for the numerical solution, via mathematical programming algorithms and available codes, of the main analysis problems. However, all the mechanical notions embodied in the present theory can be easily cast into the traditional tensor description of continua.

REFERENCES

[1] W. Prager, *Bauschinger adaptation of rigid, work-hardening trusses*, Mechanics Research Communications 1 No. 5-6 (1974) 253-256.

[2] C. Polizzotto, *Work-hardening adaptation of rigid-plastic structures*, Report Facolta Architettura di Palermo (Feb. 1975).

[3] G. Maier, *A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes*, Meccanica 5 (1970) 54-66.

[4] J. A. König, *Shakedown of strainhardening structures (in Polish)*, IPPT Reports No. 18 (1971).

[5] G. Maier, *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second order geometric effects*, in: A. Sawczuk (ed.), *Foundations of Plasticity*, Proc. Int. Symp., Warsaw, Sep. 1972 (Noordhoff Pub., Groningen, 1973).

[6] J. A. König, *Shakedown deflections — a finite element approach*, Theor. Appl. Mech., Bulgarian Academy of Sciences 3, No. 2 (1972) 65-69.

[7] E. Vitiello, *Upper bounds to plastic strains in shakedown of structures subjected to cyclic loads*, Meccanica **7** (1972) 205-213.

[8] A. R. S. Ponter, *An upper bound on the small displacements of elastic, perfectly plastic structures*, J. Appl. Mech. ASME **39** (1972) 959-963.

[9] G. Maier, *Upper bounds on deformations of elastic, workhardening structures in the presence of dynamic and second-order geometric effects*, J. Struc. Mech. 2 (1973) 265-280.

[10] M. Capurso, *A displacement bounding principle in shakedown of structures subjected to cyclic loads*, Int. J. Sol. Struc. **10** (1974) 77-92.

WILLIAM PRAGER (*)

Optimal arrangement of the beams of a rectangular grillage.

Summary. — *The minimum-weight design of a rectangular grillage is discussed that is to be on the verge of plastic collapse under a given loading. It is shown how the optimal arrangements of the beams near the corners of the grillage can be matched to furnish the optimal arrangement of beams for the entire grillage.*

Riassunto. — *In questa nota si studia la disposizione ottimale delle travi in un graticcio a contorno rettangolare. I vincoli lungo i lati del contorno sono di appoggio semplice o di incastro perfetto. È assegnato un sistema di carichi trasversali (verticali, essendo il contorno orizzontale). In presenza di questi carichi la struttura deve essere in una situazione di collasso plastico nel senso del calcolo a rottura. Nel rispetto di tale condizione, si determina il progetto di minimo peso del graticcio, discutendo le condizioni di ottimalità dapprima per una trave e poi per un graticcio, esaminando gli aspetti geometrici del meccanismo di collasso in vicinanza degli angoli, infine mostrando come disposizioni ottimali di travi presso gli angoli possono essere utilizzate per generare una disposizione ottimale delle travi nell'intero graticcio.*

1. — Introduction.

This paper is concerned with the optimal arrangement of the beams of a rectangular grillage that is simply supported or built-in along its horizontal edges. A given system of vertical loads is to constitute a collapse loading in the sense of limit analysis, and the total weight of the grillage is to be minimized.

Heyman [1] has proposed an inverse method of obtaining an advantageous arrangement of the beams of a grillage. He takes the plane of the grillage as the plane $z = 0$ of a system of rectangular coordinates x, y, z

(*) Brown University, Providence, R.I., USA. Premio Panetti 1963.

and assumes a deflection $v(x, y)$ of the grillage that is continuous, has continuous first derivatives, and satisfies the kinematic conditions at the edges of the grillage. Heyman then takes the projections of the lines of principal curvature of the surface $z = v(x, y)$ onto the plane $z = 0$ as the axes of the beams of his grillage. This avoids any twisting of the beams, but does not necessarily assure minimum weight of the grillage. As will be shown in Section 3, Heyman's procedure furnishes an optimal arrangement of the beams only if at least one principal curvature of the surface $z = v(x, y)$ has everywhere the same absolute value, while the other principal curvature has at most this absolute value. This kinematic condition for the collapse mechanism of an optimal grillage was found independently by Morley [2] and Rozvany [3] in 1966, who also gave some examples of optimal grillages. Other examples are due to Sacchi and Save [4] and Lowe and Melchers [5], but the great majority of examples worked out so far is found in the papers of Rozvany [6] of which we mention only a few.

Without discussing the theory at this stage, we show an optimal arrangement of the beams of a square grillage with built-in edges (fig. 1). The dotted lines and the sides of the central square EFGH divide the area of the grillage into nine regions: four edge triangles such as ABE, four corner triangles such as AEH, and the central square EFGH. A load with point of application in ABE is carried by a cantilever beam that is normal to AB. A load acting at a point in AEH is carried by a beam that is parallel to BD and simply supported on cantilevers normal to AB and AD. In the central square, the optimal direction of beams is not unique. In fig. 1, these beams have arbitrarily been taken parallel to AB. They are simply supported on the edge beams of the central square, which are, in turn, simply supported on cantilevers such as IE or KH.

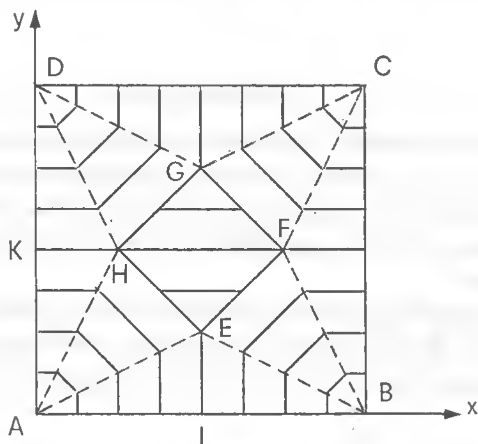


Fig. 1.

If the loading consists of a finite number of vertical forces, the optimal grillage has a finite number of beams. For distributed loading, however, the optimal grillage is a dense arrangement of beams of infinitesimal cross sections. While this sort of grillage-like continuum is not a practical design, it furnishes a lower bound on the structural weight, which is useful in the assessment of the efficiency of practical designs.

2. — Optimality condition for a beam.

To establish a necessary and sufficient condition for the optimal variation of the yield moment of a beam, we consider a beam that is simply supported at the end $x = 0$, built in at the end $x = L$, and carries a load P at $x = x_0$ (fig. 2*a*). The yield moment Y of the beam is supposed to vary continuously with the distance x along the beam, and the contribution of the beam element between the cross sections x and $x + dx$ to the

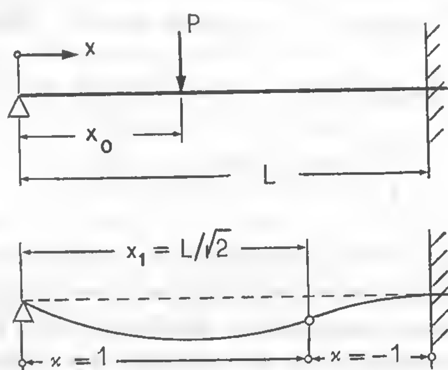


Fig. 2.

weight of the beam is assumed to be proportional to $Y(x)dx$. This assumption corresponds to beams with rectangular section of fixed depth and varying width, or to sandwich beams with a core of negligible weight and constant rectangular section, and identical cover plates of varying thickness.

If P is to be the collapse load, the optimal beam must admit a collapse mechanism with a continuous deflection $v(x)$ and a curvature $\varkappa(x) = -v''(x)$ that satisfy the relation

$$Pv(x_0) = \int_0^L Y(x)\,|\varkappa(x)|\,dx \tag{1}$$

stating that the work of the load equals the dissipated energy. Note that in writing (1), we have assumed that the derivative $v'(x)$ is continuous.

On the other hand, if the collapse load of the beam with the yield moment $Y^*(x)$ has at least the value P, it follows from the kinematical theorem of limit analysis that

$$Pv(x_0) \leq \int_0^L Y^*(x) \, |\varkappa(x)| \, dx \,, \tag{2}$$

because the deflection and curvature of the optimal beam are kinematically admissible for the other beam. Comparison of (1) and (2) furnishes

$$\int_0^L \{Y^*(x) - Y(x)\} \, |\varkappa(x)| \, dx \geq 0 \,. \tag{3}$$

If the loaded section x_0 is close to the built-in end of the beam, the optimal beam will be a cantilever, that is, $Y(x)$ will vanish for $0 \leq x < x_0$. Since the yield moment $Y^*(x)$ is nonnegative, we have

$$Y^*(x) - Y(x) \geq 0 \qquad \text{for all } x \text{ where} \qquad Y(x) = 0 \,. \tag{4}$$

Finally, if the design $Y(x)$ is to be optimal, the inequality

$$\int_0^L \{Y^*(x) - Y(x)\} \, dx \geq 0 \tag{5}$$

must be a consequence of the inequalities (3) and (4). According to a theorem of Farkas [7], the necessary and sufficient condition for this is that (5) be a nonnegative linear combination of (3) and (4). If the nonnegative coefficients of this combination are denoted by $1/k^2$ and $\mu(x)/k^2$ with $\mu(x) = 0$ where $Y(x) > 0$, the theorem of Farkas yields the optimality condition $|\varkappa(x)| + \mu(x) = k^2$ or

$$|\varkappa(x)| \begin{cases} = k^2 \text{ where } Y(x) > 0 \,, \\ \leq k^2 \text{ where } Y(x) = 0 \,. \end{cases} \tag{6}$$

Since deflection and curvature of a collapse mechanism are only determined to within a constant positive factor, we may set $k^2 = 1$.

If the loaded section of the beam is not too close to the built-in end, the optimality condition (6) with $k^2 = 1$ requires the collapse mechanism $v(x)$ of the beam to have the curvature $\varkappa(x) = 1$ for $0 \leq x < x_1$ and the curvature $\varkappa(x) = -1$ for $x_1 < x \leq L$, where x_1 remains to be determined. Moreover, $v(x)$ and its first derivative $v'(x)$ must be continuous and satisfy the kinematic boundary conditions $v(0) = v(L) = v'(L) = 0$. These conditions yield $x_1 = L/\sqrt{2}$. At the section $x = x_1$, the curvature and hence

the bending moment $M(x)$ of the optimal beam change sign. Since $M(x)$ is continuous, this means that $M(x_1) = 0$. The optimum beam thus behaves as if it had a hinge at $x = x_1$, and the bending moment becomes statically determinate. Finally, the yield moment of the optimal beam is $Y(x) = |M(x)|$.

Note that though we may envisage a hinge at $x = x_1$, the slope $v'(x)$ must remain continuous at this section. Indeed, if there were a discontinuity of slope of the amount θ at $x = x_1$, the term $Y^*(x_1)|\theta|$ would have to be added on the right of (2), and the inequality (3) would no longer be valid.

3. — Optimality condition for a grillage.

To be optimal, a beam must admit a collapse mechanism with the following properties. The deflection $v(x)$ as well as its derivative $v'(x)$ must be continuous and satisfy the kinematic boundary conditions, and the absolute value of the curvature $\varkappa(x) = -v''(x)$ must be equal to or smaller than unity, depending on whether the yield moment $Y(x)$ is positive or zero.

If the plane of an everywhere dense optimal grillage of beams is taken as the plane $z = 0$ of the rectangular coordinates x, y, z, the collapse mechanism must therefore have the following properties. The deflection $v = v(x, y)$ as well as its first derivatives $\partial_x v$ and $\partial_y v$ must be continuous and satisfy the kinematic boundary conditions, and the absolute value of the curvature of the surface $z = v(x, y)$ must be unity in the directions of the beams and not exceed unity in any other direction. The beams of the optimal grillage thus follow the projections, onto the plane $z = 0$, of those lines of principal curvature for which the curvature has the values ± 1. Denoting the principal curvatures by $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ with $|\varkappa_1| = 1$, $|\varkappa_2| \leq 1$, and the corresponding bending moments by M_1, M_2, we distinguish five types of regions (table I).

Table I. — *Types of Regions.*

Type	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	M_1	M_2
R^+	1	$-1 < \varkappa_2 < 1$	≥ 0	0
R^-	-1	$-1 < \varkappa_2 < 1$	≤ 0	0
S^+	1	1	≥ 0	≥ 0
S^-	-1	-1	≤ 0	≤ 0
T	1	-1	≥ 0	≤ 0

4. — Collapse mechanism near corner.

For grillages with straight edges, the collapse mechanism is often of the following type: the area of the grillage is divided into polygonal regions in each of which the deflection $v(x, y)$ is a second order polynomial in x and y; moreover, in regions adjacent to a corner of the grillage, these polynomials are homogeneous.

Let us, for instance, consider the corner formed by the simply supported edge $y = 0$ and the built-in edge $x = 0$. We assume that the deflections $v_1(x, y)$ and $v_2(x, y)$ in the neighborhood of these edges are second order homogeneous polynomials. To satisfy the kinematic boundary conditions, they must be of the forms

$$v_1 = axy + by^2 , \qquad v_2 = x^2/2 , \tag{7}$$

where a and b are constants and the coefficient of x^2 in v_2 has already been chosen to satisfy the optimality condition, which requires a principal curvature of the absolute value 1. Since this principal curvature is $-\partial_{xx}v_2 = -1$, and the other principal curvature is $-\partial_{yy}v_2 = 0$, the region adjacent to the edge $x = 0$ is of type R^-, with beams in the x-direction.

Along some line AC with the equation $x = cy$, the functions v_1 and v_2 must have the same values and the same first derivatives. These conditions furnish

$$a = c , \qquad b = - c^2/2 . \tag{8}$$

Finally, the surface $z = v_1(x, y)$ must have a principal curvature of the absolute value 1, while the absolute value of the other principal curvature must not exceed 1. In view of (8), the characteristic equation

$$\begin{vmatrix} \partial_{xx}v_1 + \varkappa & \partial_{xy}v_1 \\ \partial_{xy}v_1 & \partial_{yy}v_1 + \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

furnishes the principal curvatures

$$\varkappa = \{ c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4c^2} \} /2 , \tag{10}$$

and the optimality condition yields

$$c = 1/\sqrt{2} , \tag{11}$$

and hence

$$\varkappa_1 = 1 , \qquad \varkappa_2 = -1/2 . \tag{12}$$

If θ is the angle between the x-axis and the first principal direction, we have $\partial_{xx}v_1 \cos \theta + \partial_{xy}v_1 \sin \theta = -\varkappa \cos \theta$. Accordingly,

$$\tan \theta = - \sqrt{2} \quad \text{for} \quad \varkappa = \varkappa_1 . \tag{13}$$

The region adjacent to the edge $y = 0$ thus is of type R^+, with beams that form the angle θ in (13) with the x-axis.

Fig. 3, in which the labels s and b indicate simply supported and built-in edges, shows the optimal arrangement of beams near the consi-

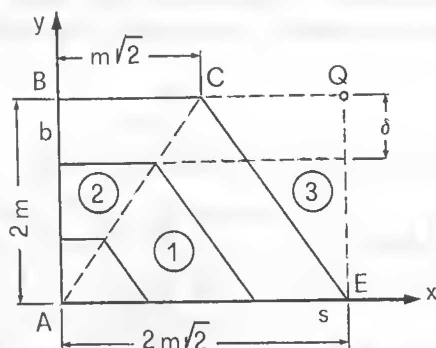


Fig. 3.

dered corner. A load acting in region 1, say at a point of CE, is carried by the beam CE, which is simply supported at C on the cantilever BC and at E on the edge $y = 0$. A load acting in region 2, say at *a* point on BC, is carried by a cantilever from B to the point of application of the load.

For the combination of this pattern of beams near the corner A with the patterns near the other corners of the grillage, it is important to note that the deflections v_1 and v_2 can be continued into the triangle CEQ (region 3) without discontinuities in the deflection or its first derivatives. Region 3 turns out to be type S^+, that is, the surface $z = v_3(x, y)$ is spherical. The point Q is the projection of the center of this sphere onto the plane $z = 0$. Accordingly, $\partial_x v = 0$ on EQ and $\partial_y v = 0$ on CQ. Since the curvature $\varkappa_x$ is -1 on BC and 1 on CQ, and since the abscissa of Q is twice that of C, the deflection at Q is twice that at C. The spherical surface $z = v_3(x, y)$ is uniquely determined by its unit curvature and its ordinates (i.e. the deflections) at C, E, and Q. The matching of v_2 and v_3 at the points C and E thus assures continuity of the deflection across CE.

It remains to be shown that $\partial_x v_1 = \partial_x v_3$ on CE or, what amounts to the same, that

$$\int_0^{x_E} \varkappa_x dx = 0 \qquad \text{along any line } y = \text{const.} \tag{14}$$

Along such a line with the ordinate $y_C - \delta$, it follows from (7) that $\varkappa_x = -1$ on $0 \leq x < x_C - \delta/\sqrt{2}$ and $\varkappa_x = 0$ on $x_C - \delta/\sqrt{2} < x < x_C + \delta/\sqrt{2}$. More-

over, $\varkappa_x = 1$ on $x_C + \delta/\sqrt{2} < x < x_E = 2x_C$, since region 3 is of type S^+. The condition (14) thus is fulfilled.

Right corners formed by two simply supported edges or by two built-in edges can be discussed in a similar manner. Figs. 4*a* and 4*b* show the optimal beam patterns for these two cases. Here too, the deflections can be smoothly continued into the triangle BEQ (region 2) in fig. 4*a*,

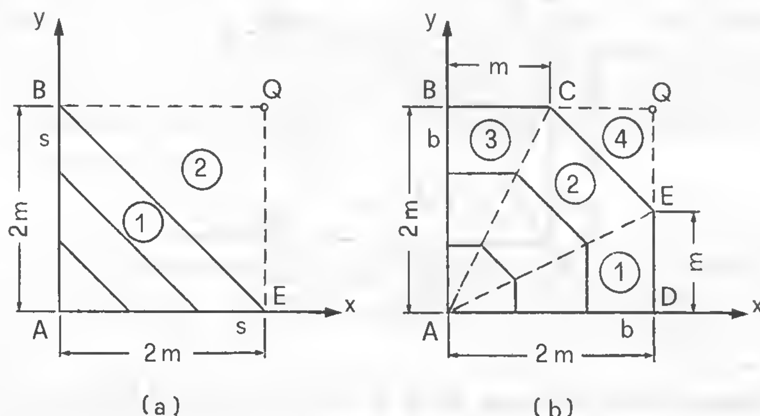


Fig. 4.

and into the triangle CEQ (region 4) in fig. 4*b*. In these regions, which are of type S^+, the collapse mechanism is spherical, and the point Q is the projection of the center of the sphere onto the plane $z = 0$. Accordingly, the x-derivative of the deflection vanishes along EQ, and the y-derivative along BQ.

The types of the regions, and the expressions for the deflections for the cases shown in figs. 3 and 4 are given below.

Figure 3:

$$\begin{aligned} &\text{Region 1: } R^+, \quad v_1 = (2xy\sqrt{2} - y^2)/4\,, \\ &\text{Region 2: } R^-, \quad v_2 = x^2/2\,, \\ &\text{Region 3: } S^+, \quad v_3 = (-x^2 - y^2 + 4mx\sqrt{2} + 4my - 8m^2)/2\,, \\ &\text{Point } Q\text{: } x_Q/y_Q = \sqrt{2}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Figure 4a:

$$\begin{aligned} &\text{Region 1: } T, \quad v_1 = xy\,, \\ &\text{Region 2: } S^+, \quad v_2 = (-x^2 - y^2 + 4mx + 4my - 4m^2)/2\,, \\ &\text{Point } Q\text{: } x_Q/y_Q = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Figure 4b:

$$\begin{aligned}
&\text{Region 1: } R^-, \quad v_1 = y^2/2\,, \\
&\text{Region 2: } R^+, \quad v_2 = (-\,x^2 + 4xy - y^2)/6\,, \\
&\text{Region 3: } R^-, \quad v_3 = x^2/2\,, \\
&\text{Region 4: } S^+, \quad v_4 = (-\,x^2 - y^2 + 4mx + 4my - 6m^2)/2\,, \\
&\text{Point } Q\text{: } x_Q/y_Q = 1\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

5. — Matching of collapse mechanisms.

In matching the collapse mechanisms for the corners of the grillage, we shall refer to the points Q in figs. 3 and 4 as central points. To illustrate this matching, consider a grillage with a built-in edge on $x = 0$ and simply supported edges on $y = 0$, $y = 1$, and $y = L$.

We first assume that $L \gg 1$. Near the line joining the centers of the long sides, we then have beams in the y direction, which are simply supported on $y = 0$ and $y = 1$. This central region, where we have $\varkappa_1 = \varkappa_x = 1$, $\varkappa_2 = \varkappa_y = 0$, is of type R^+. Near the left-hand corners in fig. 5, the optimal beam pattern is of the type shown in fig. 3, and the distances of the central point Q from the sides $y = 0$, $x = 0$, and $y = 1$ have the ratios $1 : \sqrt{2} : 1$. Accordingly, $x_Q = \sqrt{2}/2$, $y_Q = 1/2$. Near the right-hand corners the optimal beam pattern is of the type shown in fig. 4*a*, and the distances of the central point Q' from the three simply supported sides are equal, i.e. $x'_Q = L - 1/2$, $y'_Q = 1/2$.

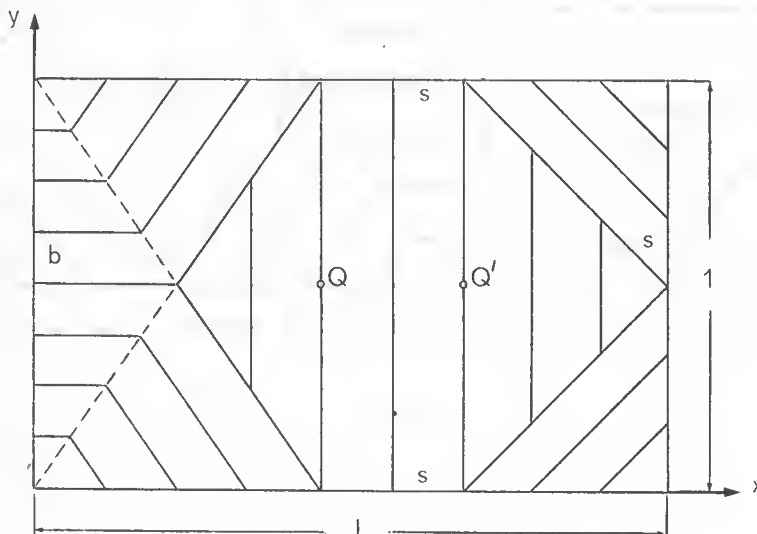


Fig. 5.

If we now let the longer sides decrease in length, the optimal arrangement remains of the type shown in fig. 5 until Q' coincides with Q, i.e. until $L = (1 + \sqrt{2})/2 = 1.2071 = L^*$. For $L \leqslant L^*$, the beams in the central part of the grillage are in the x-direction. They are built-in at $x = 0$, and simply supported at $x = L$. This central part consists of a region of type R^- near the built-in edge, with $\varkappa_1 = \varkappa_x = -1$, $\varkappa_2 = \varkappa_y = 0$, and a region of type R^+ near the edge $x = L$, with $\varkappa_1 = \varkappa_x = 1$, $\varkappa_2 = \varkappa_y = 0$. The boundary between these regions is $x = (2 - \sqrt{2})L/2$. The triangular regions of type S^+ near the top and bottom edges in fig. 6*a* have the central points Q'' and Q''' with the coordinates $x_Q'' = x_Q''' = (2 - \sqrt{2})L$, $y_Q'' = (\sqrt{2} - 1)L$, $y_Q''' = 1 - y_Q''$.

As we let L increase, the optimal arrangement remains of the type shown in fig. 6*a* until $y_Q'' = 1/2$, i.e. until $L = 1/(2\sqrt{2} - 2) = 1.2071$. For this value of L, the optimal beam pattern near the corners is as shown in fig. 6*b*. Since the region RSTU is of the type S^+, the beams there may be given any direction.

As the preceding discussion shows, the information contained in figs. 3 and 4 and in eqs. (15) through (17) enables us to find the optimal arrangement of beams for any rectangular grillage.

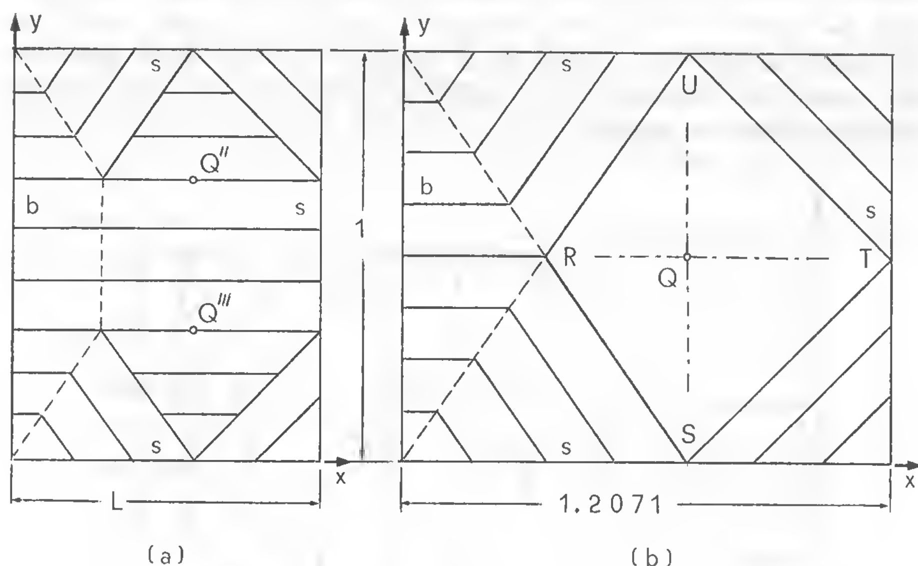


Fig. 6.

REFERENCES

[1] J. HEYMAN, *Inverse design of beams and grillages*, « Proceedings of the Institution of Civil Engineers » **13** (1959) 332-352.

[2] C. T. MORLEY, *The minimum reinforcement of concrete slabs*, « International Journal of Mechanical Sciences » **8** (1966) 305-319.

[3] G. I. N. ROZVANY, *Analysis versus synthesis in structural engineering*, « Civil Engineering Transactions, Institution of Engineers, Australia » **CE8** (1966) 158-166.

[4] G. SACCHI and M. SAVE, *Problems of minimum weight of reinforcement of reinforced concrete slabs*, « Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering » **29-II** (1969) 157-166.

[5] P. G. LOWE and R. E. MELCHERS, *On the theory of optimal, constant thickness. fibre-reinforced plates*, « International Journal of Mechanical Sciences » **14** (1972) 311-324 and **15** (1973) 157-169 and 711-726.

[6] G. I. N. ROZVANY, *Grillages of maximum strength and maximum stiffness*, « International Journal of Mechanical Sciences » **14** (1972) 651-666; *Optimal load transmission by flexure*, « Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering » **1** (1972) 253-263; *Grillages of least weight - simply supported boundaries*, « International Journal of Mechanical Sciences » **15** (1973) 665-677; *Optimal force transmission by flexure - clamped boundaries*, « Journal of Structural Mechanics » **2** (1974) 57-82.

[7] J. FARKAS, *Ueber die Theorie der einfachen Ungleichungen*, « Journal für reine und angewandte Mathematik » **124** (1902) 1-24.

CATALDO AGOSTINELLI (*)

Il problema della separazione delle variabili nelle equazioni della dinamica.

Riassunto. — *Si considera il problema dell'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi. Si danno due soluzioni del problema e si verifica che i tipi di energia cinetica e di potenziali delle forze, ottenuti nelle due soluzioni, rendono effettivamente integrabili per separazione di variabili le corrispondenti equazioni di Hamilton-Jacobi. Come casi limiti si hanno le soluzioni di Levi-Civita e di Stäckel. Si dimostrano infine alcune proprietà dei sistemi dinamici caratterizzati da quelle soluzioni.*

Premesse.

Il problema della separazione delle variabili nelle equazioni della dinamica consiste essenzialmente nel determinare tutti i tipi di problemi dinamici con vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative, per i quali le corrispondenti equazioni di Hamilton-Jacobi siano integrabili per separazione di variabili.

La questione fu posta come si sa da Stäckel nel 1891 [1], che riuscì a determinare il caso di integrabilità che porta il suo nome, nel quale l'energia cinetica ha forma ortogonale, mentre un caso più particolare di integrabilità, che rientra in quello di Stäckel, era stato in precedenza segnalato da Liouville.

Lo stesso Stäckel assegnò anche in modo esplicito le condizioni per la possibilità del problema nel caso generale di sistemi con n gradi di libertà. Queste condizioni furono successivamente ricavate, sotto altra forma, da Levi-Civita in una lettera allo stesso Stäckel pubblicata nei « Mathematische Annalen » [2].

Ora la questione di determinare col criterio della separazione delle variabili un cosiddetto integrale completo dell'equazione alle derivate parziali del primo ordine di Hamilton-Jacobi, le cui equazioni caratteristiche

(*) Università di Torino.

sono le equazioni canoniche di un sistema dinamico, si presenta spontaneo in molti problemi concreti. D'altra parte i casi più notevoli in cui si riesce effettivamente ad assegnare un integrale completo di detta equazione sono appunto quelli in cui è applicabile il criterio della separazione delle variabili.

Ma questa possibilità si riscontra evidentemente soltanto in corrispondenza di forme particolari dell'energia cinetica e del potenziale delle forze. Da ciò l'importanza di determinare tutte le forme per cui è applicabile il detto criterio.

In merito a questa questione il Levi-Civita, nella lettera allo Stäckel, dopo aver stabilito le condizioni per la possibilità di risoluzione del problema, assegnava una classificazione dei casi in cui si presenta questa possibilità e risolveva il problema in un caso particolare nel quale le forze agenti sono nulle e la varietà metrica definita dall'energia cinetica è euclidea.

Successivamente il Dall'Acqua [3] compieva un ulteriore passo dando la risoluzione completa del problema nel caso di tre variabili.

In una nota posteriore il Burgatti [4] affrontava di nuovo il problema assegnando in modo intuitivo, nel caso generale di n variabili, $n - 1$ nuovi tipi di equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili, senza però dimostrare se quei tipi fossero i più generali.

Più tardi, in una Memoria dell'Accademia delle Scienze di Torino [5], e in una Nota dell'Istituto Veneto [6], utilizzando la classificazione di Levi-Civita, veniva da me data la risoluzione generale e sistematica del problema mediante un algoritmo più sintetico e dopo aver messo in luce alcune riposte proprietà geometriche della varietà metrica vincolare legata all'espressione dell'energia cinetica.

In questi lavori assegnavo, nel caso generale di n variabili, esplicitamente tutti i tipi di energia cinetica e di potenziali delle forze per cui le corrispondenti equazioni di Hamilton-Jacobi sono integrabili per separazione di variabili.

Ultimamente, in due Note dell'Accademia dei Lincei [7], ho mostrato come i sistemi dinamici caratterizzati in quei lavori si integrano effettivamente col criterio della separazione delle variabili. Ho messo in evidenza come nel caso generale di n variabili esistono k $(k < n)$ integrali lineari nei momenti ed $n - k$ integrali quadratici. Ho assegnato quindi i corrispondenti integrali completi, contenenti cioè tante costanti arbitrarie *essenziali* quante sono le variabili incognite funzioni del tempo. In detti sistemi sono compresi, come casi estremi, quello di Levi-Civita e quello di Stäckel.

Infine, in un'altra nota lincea [8], con riferimento al caso generale di sistemi che ammettono k integrali lineari ed $n - k$ integrali quadratici nei momenti, ho mostrato come mediante una semplice trasformazione canonica puntuale, essi si trasformano in sistemi dinamici con k coordinate ignorabili.

1. — Posizione del problema e condizioni per la possibilità di esso.

Per vedere in che cosa consiste il problema della separazione delle variabili riferiamoci a un sistema dinamico con n gradi di libertà, con vincoli indipendenti dal tempo, la cui configurazione in ogni istante sia individuata dalla conoscenza dei valori di n parametri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e sia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \,, \tag{1.1}$$

la sua energia cinetica, dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni soltanto delle coordinate lagrangiane ed è $\dot{x}_i = dx_i/dt$; sia inoltre $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il potenziale delle forze agenti su di esso.

Introducendo i *momenti* p_i, o le *variabili coniugate* delle x_i, definite dalla

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, a_{ij} \dot{x}_j \,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{1.2}$$

l'energia cinetica T, che è omogenea quadratica nelle $\dot{x}_i$, assume la forma canonica

$$(T) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a^{ij} p_i p_j \,, \tag{1.3}$$

dove le a^{ij} sono gli elementi reciproci dei coefficienti a_{ij} nel determinante formato con questi coefficienti.

Introducendo allora la *funzione caratteristica* di quel sistema

$$H = (T) - U = H(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \,, \tag{1.4}$$

le equazioni del moto, sotto forma canonica o hamiltoniana, sono

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,, \qquad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{1.5}$$

e la loro integrazione si riduce, come si sa, a determinare un *integrale completo* dell'equazione alle derivate parziali (di Hamilton-Jacobi)

$$H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \,; \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = h \,, \tag{1.6}$$

dove h è la costante (arbitraria) dell'energia, e sulla quale si è posto

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \,. \tag{1.7}$$

Ciò premesso il problema di integrare la (1.6) per separazione di variabili, o meglio di determinare tutti i tipi di equazioni (1.6) per cui sia possibile l'integrazione di ciascuna di esse col metodo della separazione delle variabili, consiste nel determinare una funzione W che la soddisfi della forma

$$W = \sum_1^n{}_i W_i(x_i) , \tag{1.8}$$

involgente, in modo essenziale, altre $n - 1$ costanti arbitrarie oltre h, dove W_i è funzione soltanto della variabile x_i.

Ora l'ipotesi che la funzione W sia della forma (1.8), equivale, per la (1.7), a supporre

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0, \quad \text{per } i \neq j . \tag{1.9}$$

D'altra parte, derivando totalmente la (1.6) rispetto a una generica x_i, e avendo riguardo alla (1.9), si ricava

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dx_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots , n) ,$$

le quali, nell'ipotesi che nessuna delle $dH/\partial p_i$ si annulli, porgono

$$\frac{dp_i}{dx_i} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_i} , \qquad (i = 1, 2, \ldots , n) . \tag{1.10}$$

Per l'esistenza delle funzioni p_i, le cui derivate sono definite dalle (1.9) e (1.10), devono essere necessariamente soddisfatte le condizioni di integrabilità

$$\frac{d}{dx_j}\left(\frac{dp_i}{dx_i}\right) = 0 , \qquad (i, j = 1, 2, \ldots , n \ ; \ i \neq j) , \tag{1.11}$$

le quali per la stessa (1.10) diventano

$$\frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0 , \qquad (i \neq j) . \tag{1.12}$$

Poiché la funzione $H = (T) - U$ dipende dalle x_i, sia attraverso i coefficienti a^{ij} dell'energia cinetica (T) e sia attraverso le p, oltre che per mezzo del potenziale U, le condizioni (1.12) vanno sviluppate col simbolo operativo

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_j}\right) \frac{\partial}{\partial p_j} .$$

Si ottengono pertanto le seguenti equazioni di condizione

$$(1.13)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_j} - $$

$$- \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = 0, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j),$$

che sono in totale $n(n-1)/2$.

Ponendo in luogo di H il suo valore $(T) - U$, essendo la (T) espressa dalla (1.3) in funzione delle x e delle p, le condizioni precedenti diventano

(1.14)

$$\frac{\partial (T)}{\partial p_i}\frac{\partial (T)}{\partial p_j}\left(\frac{\partial^2 (T)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial (T)}{\partial p_i}\left(\frac{\partial (T)}{\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 (T)}{\partial x_i \partial p_j} -$$

$$-\left(\frac{\partial (T)}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\frac{\partial (T)}{\partial p_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial x_j} + \left(\frac{\partial (T)}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial (T)}{\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial p_j} = 0.$$

In ciascuno dei primi membri di queste condizioni compare un gruppo di termini di quarto grado nelle p_i, e quindi di quarto grado nelle $\dot{x}_i$; un gruppo di termini di secondo grado e un gruppo di termini di grado zero. Dovendo quelle condizioni essere identicamente soddisfatte per valori arbitrari delle $\dot{x}$, ognuno di questi gruppi dovrà essere identicamente nullo; pertanto la (1.14) si scinde nelle seguenti condizioni:

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\partial (T)}{\partial p_i}\frac{\partial (T)}{\partial p_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial (T)}{\partial p_i}\frac{\partial (T)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial (T)}{\partial x_i}\frac{\partial (T)}{\partial p_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial (T)}{\partial x_i}\frac{\partial (T)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial p_j} = 0 ,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\partial (T)}{\partial p_i}\left(\frac{\partial (T)}{\partial p_j}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial x_i \partial p_j}\right) + \frac{\partial (T)}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial p_j} +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial x_i}\left(- \frac{\partial (T)}{\partial p_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial (T)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial p_j}\right) = 0 ,$$

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{\partial^2 (T)}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \qquad (i,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j) .$$

Confrontando le (I) con le (1.13), risulta, come già fu notato da Levi-Civita nel lavoro citato, che se è integrabile per separazione di varia-

bili l'equazione $H = (T) - U = h$, la stessa proprietà compete all'equazione $(T) = h$, che si ha in assenza di forze. In altri termini i tipi di energia cinetica che rendono integrabile per separazione di variabili l'equazione (1.6), rendono integrabile anche la $(T) = h$.

Perciò, una volta determinata la (T) in modo da soddisfare le condizioni (I), la risoluzione completa del problema si riduce a determinare il potenziale U delle forze in modo che siano verificate le ulteriori condizioni (II) e (III).

Poiché in assenza di forze attive il moto del sistema è un moto spontaneo, le traiettorie del punto rappresentativo sulla varietà metrica vincolare V_n, il cui quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = 2T \cdot dt^2 = \sum_{ij}^{n} {}_1 \, a_{ij} dx_i dx_j \,, \tag{1.15}$$

sono, come si sa, le *geodetiche* di questa varietà. Dal punto di vista geometrico il problema risulta allora ridotto a determinare tutti i ds^2 di una varietà riemanniana V_n, per cui le equazioni delle geodetiche si integrano colla separazione delle variabili.

Esplicitando le condizioni (I), si perviene alla conclusione che per la possibilità del problema devono essere intanto verificate le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad (r, s \neq i) \,. \tag{1.16}$$

oppure le seguenti

$$a^{ij} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0 \,, \qquad \sum_{1}^{n} {}_l \, a^{il} \frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{ij} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0 \,, \tag{1.17}$$

$$\sum_{1}^{n} {}_l \, a^{il} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} a^{ij} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j} = 0 \,, \qquad (r, s, j \neq i \,; \quad r, s \neq j) \,.$$

Dunque, per ogni valore dell'indice i da 1 ad n devono essere necessariamente soddisfatte o le condizioni (1.16), oppure le (1.17).

In tal caso i primi membri delle (I) risultano divisibili per il prodotto $\dfrac{\partial(T)}{\partial p_i} \dfrac{\partial(T)}{\partial p_j}$, o ciò che è lo stesso per il prodotto $\dot{x}_i \dot{x}_j$, ed essi si riducono pertanto a polinomi di secondo grado nella $\dot{x}_i$. Annullando i singoli coefficienti di questi polinomi si ottengono le ulteriori condizioni che sono di secondo ordine nei coefficienti a_{rs}.

Secondo un criterio di classificazione di Levi-Civita il problema si può risolvere in generale ammettendo che per k valori dell'indice i

$(i = 1, 2, \ldots, k;\ k < n)$ siano soddisfatte le condizioni (1.16), e per i rimanenti $n - k$ valori di i $(i = k + 1, \ldots, n)$, siano invece verificate le condizioni (1.17).

Seguendo questo criterio l'analisi dettagliata del problema mi ha portato a riconoscere che *le varietà* W_k $(x_{k+1} = \text{cost.}, \ldots, x_n = \text{cost.})$, *subordinate sulla varietà metrica* V_n, *il cui elemento lineare è definito dalla* (1.15), *sono applicabili su un* S_k *euclideo.*

In base a queste proprietà il problema è stato risolto per via diretta nella Memoria citata in [5] senza aver bisogno di considerare le ulteriori condizioni di secondo ordine a cui ho accennato, ottenendo così, nel caso generale di $1 \leq k < n$, due soluzioni del problema.

2. — Prima soluzione.

In una prima soluzione i coefficienti dell'energia cinetica T sono dati da

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} a_{ij} &= \mathcal{K} \sum_{1}^{k}{}_s \frac{X_i^{(s)} X_j^{(s)}}{\sum_{k+1}^{n}{}_t K_t{}^{(s)}(x_t)}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i) \\ a_{ii} &= \mathcal{K} \sum_{1}^{k}{}_s \frac{[X_i{}^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^{n}{}_t K_t{}^{(s)}(x_t)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \\ a_{ii} &= \mathcal{K} \left\{ \Psi_i(x_i) + \sum_{1}^{k}{}_s \frac{[X_i{}^{(s)}]^2}{\sum_{k+1}^{n}{}_t K_t{}^{(s)}(x_t)} \right\}, \qquad (i = k + 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

dove $X_i{}^{(s)}$, Ψ_i sono funzioni del solo parametro x_i, ed è inoltre

$$(2.2)\qquad \mathcal{K} = \sum_{k+1}^{n}{}_t\, \mathcal{K}_t(x_t).$$

Il potenziale delle forze ha il valore

$$(2.3)\qquad U = \frac{1}{\mathcal{K}} \left\{ \sum_{1}^{k}{}_s\, b_s \left[\sum_{k+1}^{n}{}_i K_i{}^{(s)}(x_i) \right] + \sum_{k+1}^{n}{}_i\, \Phi_i(x_i) \right\},$$

con b_s costante. Esso si può porre nella forma più semplice

$$(2.4)\qquad U = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{k+1}^{n}{}_i\, U_i(x_i), \qquad \text{con} \qquad U_i(x_i) = \sum_{1}^{k}{}_s\, b_s K_i{}^{(s)}(x_i) + \Phi_i(x_i).$$

Questa mostra che le componenti delle forze $\partial U / \partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, tangenti alla varietà euclidea W_k (subordinata in V_n), sono nulle.

Gli elementi reciproci dei coefficienti (2.1) sono

(2.5)

$$a^{ij} = \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{1}^{k}{}_s \frac{B_{is}}{B} \left\{ \frac{B_{js}}{B} \sum_{k+1}^{n}{}_t K_t{}^{(s)}(x_t) + \sum_{k+1}^{n}{}_l \sum_{1}^{k}{}_r \frac{B_{jr}}{B} \frac{X_l{}^{(r)} X_l{}^{(s)}}{\Psi_l(x_l)} \right\}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

$$a^{ij} = -\frac{1}{\mathcal{K} \Psi_i} \sum_{1}^{k}{}_s X_i{}^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, \quad (i = k+1, \ldots, n \ ; \ j = 1, 2, \ldots, k)$$

$$a^{ii} = \frac{1}{\mathcal{K} \Psi_i}, \quad (i = k+1, \ldots, n); \quad a^{ij} = 0, \quad (i, j = k+1, \ldots, n; \ j \neq i),$$

dove è

$$(2.6) \qquad B = \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, \ldots, & X_1^{(k)} \\ X_2^{(1)}, & X_2^{(2)}, \ldots, & X_2^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_k^{(1)}, & X_k^{(2)}, \ldots, & X_k^{(k)} \end{vmatrix}$$

e B_{is} è il complemento algebrico di $X_i^{(s)}$ nel determinante B.

Dal punto di vista geometrico l'ultima delle (2.5) mostra che *i sistemi di ipersuperficie coordinate* $x_i = \text{cost.}$, $x_j = \text{cost.}$ $(i, \ j = k+1, \ldots, n; \ j \neq i)$, *sono ortogonali*, e nel loro insieme costituiscono $n - k$ sistemi di ipersuperficie $x_i = \text{cost.}$ $(i = k+1, \ldots, n)$, tali che una qualsiasi ipersuperficie di uno di questi sistemi taglia ortogonalmente le ipersuperficie degli altri sistemi.

Prescindendo dal modo con cui è stata ottenuta la soluzione espressa dalle (2.5) e (2.4), verificheremo ora come questa soluzione consente di determinare, col criterio della separazione delle variabili, un integrale completo dell'equazione di Jacobi, che scriveremo nella forma

$$(2.7) \qquad (T) - U \equiv \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{ij} a^{ij} p_i p_j - U = h .$$

Invero questa equazione diventa

$$(2.8) \qquad \frac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_{ij} a^{ij} p_i p_j + \sum_{k+1}^{n}{}_i \sum_{1}^{k}{}_j a^{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} \sum_{k+1}^{n}{}_i a^{ii} p_i^2 - U = h ,$$

e fatte le sostituzioni si ha

$$(2.9) \qquad \frac{1}{2\mathcal{K}} \sum_{1}^{k}{}_{ij} p_i p_j \left\{ \sum_{1}^{k}{}_s \frac{B_{is} B_{js}}{B^2} \sum_{k+1}^{n}{}_t K_t^{(s)} + \sum_{1}^{k}{}_s \frac{B_{is}}{B} \sum_{k+1}^{n}{}_l \sum_{1}^{k}{}_r \frac{B_{jr}}{B} \frac{X_l^{(r)} X_l^{(s)}}{\Psi_l} \right\} -$$

$$- \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{p_i}{\Psi_i} \sum_{1}^{k}{}_j p_j \sum_{1}^{k}{}_s X_i^{(s)} \frac{B_{js}}{B} + \frac{1}{2\mathcal{K}} \sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{p_i^2}{\Psi_i} - \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{k+1}^{n}{}_i U_i(x_i) = h .$$

Ponendo

$$p_i = \sum_1^k {}_s \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.10}$$

dove le α_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ sono costanti arbitrarie, la (2.9), per note proprietà dei determinanti, dopo aver moltiplicato ambo i membri per $\mathcal{H} = \sum_{k+1}^n {}_i \mathcal{H}_i(x_i)$, e cambiato opportunamente gli indici, diventa

$$\sum_{k+1}^n {}_i \left\{ \frac{1}{2} \sum_1^k {}_s \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) + \frac{1}{2} \sum_1^k {}_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_i^{(r)} X_i^{(s)}}{\Psi_i} - \right. \tag{2.11}$$

$$\left. - \frac{p_i}{\Psi_i} \sum_1^k {}_s \alpha_s X_r^{(s)} + \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{\Psi_i} - U_i(x_i) - h\mathcal{H}_i(x_i) \right\} = 0 .$$

Questa dovrà risultare una identità, e poiché la quantità racchiusa tra graffe dipende dal solo parametro x_i, dovremo avere

$$\frac{p_i^2}{2\Psi_i} - \frac{p_i}{\Psi_i} \sum_1^k {}_s \alpha_s X_i^{(s)} + \frac{1}{2} \sum_1^k {}_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_i^{(r)} X_i^{(s)}}{\Psi_i} + \tag{2.12}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^k {}_s \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) - U_i(x_i) - h\mathcal{H}_i(x_i) = \beta_i, \qquad (i = k + 1, \ldots, n),$$

dove le β_i sono nuove costanti arbitrarie con

$$\beta_{k+1} + \beta_{k+2} + \ldots + \beta_n = 0 . \tag{2.13}$$

Le (2.10) e (2.12) danno la prima soluzione richiesta. Le (2.10), che costituiscono k integrali primi lineari nei momenti, forniscono senz'altro le $\partial W/\partial x_i = dW_i/dx_i$ in funzione di x_i, per $i = 1, 2, \ldots, k$, e quindi

$$W_i(x_i) = \sum_1^k {}_s \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) . \tag{2.14}$$

Le stesse (2.10), risolute rispetto alle costanti arbitrarie α_s, porgono

$$\sum_1^k {}_i \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, k) . \tag{2.15}$$

Le (2.12) invece costituiscono $n - k$ integrali primi quadratici nei momenti. Risolvendole rispetto alle p_i, e osservando che

$$\sum_1^k {}_{rs} \alpha_r \alpha_s X_i^{(r)} X_i^{(s)} = \left[\sum_1^k {}_s \alpha_s X_i^{(s)} \right]^2,$$

si ottiene

$$(2.16)\qquad p_i = \frac{dW_i}{dx_i} = \sum_1^k {}_s\, \alpha_s X_i^{(s)} + \sqrt{2\Psi_i(U_i + h\mathcal{K}_i + \beta_i - \frac{1}{2}\sum_1^k {}_s\, \alpha_s^2 K_i^{(s)}}, \qquad (i = k+1, \ldots, n),$$

da cui segue

$$(2.17)\qquad W_i(x_i) = \sum_1^k {}_s\, \alpha_s \int X_i^{(s)} dx_i + \int \sqrt{2\Psi_i(U_i + h\mathcal{K}_i + \beta_i - \frac{1}{2}\sum_1^k {}_s\, \alpha_s^2 K_i^{(s)}}\, dx_i, \qquad (i = k+1, \ldots, n).$$

Sommando le (2.14) e (2.17) si ha la prima soluzione richiesta

$$W = \sum_1^k {}_i\, W_i(x_i) + \sum_{k+1}^n {}_i\, W_i(x_i),$$

che costituisce un integrale completo dell'equazione (2.8), involgente, in modo essenziale, le n costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{n-1}, h$.

3. — Seconda soluzione.

In una seconda soluzione i coefficienti dell'energia cinetica T sono dati da

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} a_{ij} &= \sum_1^k {}_s\, X_i^{(s)}(x_i) X_j^{(s)}(x_j)/\varphi^{ns}, && (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i) \\ a_{ii} &= \sum_1^k {}_s\, [X_j^{(s)}(x_i)]^2/\varphi^{ns}, && (i = 1, 2, \ldots, k) \\ a_{ii} &= \frac{1}{\varphi^{ni}} + \sum_1^k {}_s\, [X_i^{(s)}(x_i)]^2/\varphi^{ns}, && (i = k+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

i cui elementi reciproci sono

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} a^{ij} &= \sum_1^k {}_s \frac{B_{is} B_{js}}{B^2} \varphi^{ns} + \sum_1^k {}_s \frac{B_{is}}{B} \sum_{k+1}^n {}_l \sum_1^k {}_r \frac{B_{jr}}{B} X_l^{(r)} X_l^{(s)} \varphi^{nl}, && (i, j = 1, 2, \ldots, k) \\ a^{ij} &= -\varphi^{ni} \sum_1^k {}_s\, X_i^{(s)} \frac{B_{js}}{B}, && (i = k+1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k) \\ a^{ii} &= \varphi^{ni},\ (i = k+1, \ldots, n);\ a^{ij} = 0,\ (i, j = k+1, \ldots, n; j \neq i), \end{aligned}$$

dove B e le B_{is} sono le stesse quantità definite nella prima soluzione, mentre φ^{ni} è l'elemento reciproco di c_{ni} $(i = 1, 2, \ldots, k)$, oppure di φ_{ni} $(i = k+1, \ldots, n)$, nel determinante

$$(3.3) \qquad \varphi = \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, \dots, & c_{1k}, & \varphi_{1.k+1}, \dots, & \varphi_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, \dots, & c_{2k}, & \varphi_{2.k+1}, \dots, & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}, & c_{n2}, \dots, & c_{nk}, & \varphi_{n.k+1}, \dots, & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

nel quale le c_{ij} $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, \dots, k)$ sono delle costanti, mentre le $\varphi_{ij}(x_j)$ $(i = 1, 2, \dots, n; j = k+1, \dots, n)$, sono delle funzioni ciascuna dipendente dal solo parametro x_j il cui indice coincide col secondo indice della φ_{ij}.

Il potenziale U delle forze in questo secondo caso è dato da

$$(3.4) \qquad = U \sum_1^k{}_s b_s \varphi^{ns} + \sum_{k+1}^n{}_s U_s(x_s)\varphi^{ns},$$

dove le b_s sono delle costanti; esso dipende soltanto dai parametri $x_{k+1}, \dots, x_n$.

L'equazione (2.8) diventa ora

$$(3.5) \qquad \frac{1}{2}\sum_1^k{}_{ij} p_i p_j \left\{ \sum_1^k{}_s \frac{B_{is}B_{js}}{B^2}\varphi^{ns} + \sum_1^k{}_s \frac{B_{is}}{B} \sum_{k+1}^n{}_l \sum_1^k{}_r \frac{B_{jr}}{B} X_l^{(r)} X_l^{(s)} \varphi^{nl} \right\} -$$

$$- \sum_{k+1}^n{}_i p_i \varphi^{ni} \sum_1^k{}_j p_j \sum_1^k{}_s X_i^{(s)} \frac{B_{js}}{B} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n{}_i \varphi^{ni} p_i^2 -$$

$$- \left(\sum_1^k{}_s b_s \varphi^{ns} + \sum_{k+1}^n{}_s U_s(x_s)\varphi^{ns} \right) = h .$$

Ponendo

$$(3.6) \qquad p_i = \sum_1^k{}_s \alpha_s X_i^{(s)}, \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

con α_s $(s = 1, 2, \dots, k)$ costanti, per il momento arbitrarie, la (3.5) si riduce alla seguente

$$(3.7) \qquad \frac{1}{2}\sum_1^k{}_i \varphi^{ni}(\alpha_i^2 - 2b_i) + \sum_{k+1}^n{}_i \varphi^{ni} \left\{ \frac{1}{2} p_i^2 - p_i \sum_s{}_s \alpha_s X_i^{(s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_{rs} \alpha_r \alpha_s X_i^{(r)} X_i^{(s)} - U_i \right\} = h,$$

che è della forma

$$(3.7') \qquad \sum_1^n{}_i \varphi^{ni} \Phi_i = h$$

con

$$\Phi_i = \frac{1}{2}(\alpha_i^2 - 2b_i), \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.8}$$

e

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\left(p_i - \sum_1^k {}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right)^2 - U_i, \quad \text{per} \quad i = k+1, \ldots, n. \tag{3.8'}$$

Avendo riguardo alle proprietà dei determinanti la (3.7′) si soddisfa identicamente ponendo

$$\Phi_i = h\,\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j\, \beta_j \varphi_{ji}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.9}$$

essendo le β_j costanti arbitrarie.

Per le (3.8) e (3.8′), poiché per $i = 1, 2, \ldots, k$ è $\varphi_{ni} = c_{ni}$ e $\varphi_{ji} = c_{ji}$, avremo

$$\frac{1}{2}(\alpha_i^2 - 2\,b_i) = hc_{ni} + \sum_1^{n+1} {}_j\, \beta_j c_{ji}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_i - \sum_1^k {}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right)^2 - U_i = h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j\, \beta_j \varphi_{ji}, \quad (i = k+1, \ldots, n). \tag{3.11}$$

La (3.10) definisce le costanti α_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, in funzione delle costanti del problema b_i e c_{ji}, e delle n costanti arbitrarie $h, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, cioè

$$\alpha_i^2 = 2\left(b_i + hc_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j\, \beta_j c_{ji}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.12}$$

Le equazioni (3.6) costituiscono k integrali lineari nei momenti $p_1, p_2, \ldots, p_k$, e da esse si ricava

$$W_i(x_i) = \sum_1^k {}_s\, \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i)dx_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{3.13}$$

Le (3.11) sono invece $n - k$ integrali quadratici negli ulteriori momenti $p_{k+1}, \ldots, p_n$. Risolvendole rispetto alle $p_i = dW_i/dx_i$, si deduce

$$W_i(x_i) = \sum_1^k {}_s\, \alpha_s \int X_i^{(s)}(x_i)dx_i + \int \sqrt{2\left(U_i + h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1} {}_j\, \beta_j \varphi_{ji}\right)}dx_i, \tag{3.14}$$

$$(i = k + 1, \ldots, n).$$

La somma delle (3.13) e (3.14) dà la seconda soluzione richiesta $W = \sum_1^n {}_i W_i(x_i)$, involgente le n costanti arbitrarie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, h$, mentre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sono date dalle (3.12).

Questa seconda soluzione dipende dalle nk funzioni arbitrarie $X_i^{(s)}(x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, k)$, e dalle $n(n-k)$ funzioni φ_{ji} $(j = 1, 2, \ldots, n;\ i = k+1, \ldots, n)$, cioè in totale da n^2 funzioni arbitrarie, ciascuna dipendente da un solo parametro, che intervengono nell'espressione dell'energia cinetica.

4. — Casi estremi.

Nelle due soluzioni considerate nei numeri precedenti abbiamo supposto $1 \leq k < n$. Ma esse sussistono anche per $k = 0$ e per $k = n$.

a) Per $k = n$ si ha il *caso di Levi-Civita*, nel quale è ora

$$B = \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, \ldots, & X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)}, & X_2^{(2)}, \ldots, & X_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n^{(1)}, & X_n^{(2)}, \ldots, & X_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

e si ha

$$a^{ij} = \sum_1^n {}_r \frac{B_{ir} B_{jr}}{B^2}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.2}$$

Le forze agenti in questo caso sono nulle e il potenziale si può ritenere nullo. In questo caso il moto del sistema è quindi un moto spontaneo.

L'equazione di Hamilton-Jacobi risulta

$$\frac{1}{2} \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_i \frac{B_{ir}}{B} p_i \sum_1^n {}_j \frac{B_{jr}}{B} p_j = h\,, \tag{4.3}$$

che si soddisfa ponendo

$$p_i = \sum_1^n {}_s \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.4}$$

e

$$\frac{1}{2} \sum_1^n {}_r \alpha_r^2 = h\,. \tag{4.5}$$

Quest'ultima esprime la costante h dell'energia per mezzo delle n

costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, mentre le (4.4) costituiscono n integrali primi lineari nei momenti, che, risoluti rispetto alle costanti α_s, porgono

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4'}$$

L'integrale completo di Jacobi è in questo caso

$$W = \sum_{1}^{n}{}_i W_i(x_i) = \sum_{1}^{n}{}_s \alpha_s \sum_{1}^{n}{}_i \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i \tag{4.6}$$

b) Per $k = 0$ la prima soluzione porge

$$a_{ii} = 1/a^{ii} = \mathcal{H}\Psi_i(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{con } \mathcal{H} = \sum_{1}^{n}{}_r \mathcal{H}_r(x_r), \tag{4.7}$$

ed

$$U = \sum_{1}^{n}{}_s U_s(x_s)/\mathcal{H}, \tag{4.8}$$

che corrisponde al caso di integrabilità di Lionville.

Infine se φ^{ni} è l'elemento reciproco del termine $\varphi_{ni}(x_i)$ nel determinante di ordine $n \| \varphi_{ji}(x_i) \|$, $(j, i = 1, 2, \ldots, n)$, la seconda soluzione porge

$$a_{ii} = 1/a^{ii} = 1/\varphi^{ni}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad U = \sum_{1}^{n}{}_s U_s(x_s)\varphi^{ns}, \tag{4.9}$$

che corrisponde al *caso di integrabilità di Stäckel*, in cui l'energia cinetica ha forma quadratica ortogonale.

5. — Alcune proprietà dei sistemi canonici integrabili per separazione di variabili.

a) Nel caso in cui dell'equazione di Hamilton-Jacobi, integrabile per separazione di variabili, si considera la *prima soluzione*, le equazioni canoniche (1.5) corrispondenti, posseggono, come si è visto nel n. 2, k integrali lineari nei momenti, espressi dalle

$$p_i = \sum_{1}^{k}{}_s \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.1}$$

i quali si possono mettere sotto la forma

$$\sum_{1}^{k}{}_i \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \tag{5.1'}$$

dove le α_s sono costanti arbitrarie, ed inoltre gli $n - k$ integrali quadratici (2.12).

Vogliamo ora vedere che esiste una *trasformazione puntuale omogenea* (o di Mathieu), dalle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a delle nuove variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tale che la trasformata $\bar{H}$ della funzione hamiltoniana H abbia k variabili ignorate, ad es. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$.

Indicando con $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ le variabili coniugate di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, la cercata trasformazione dovrà verificare la relazione differenziale [9]

$$\sum_1^n{}_s \pi_s d\xi_s - \sum_1^n{}_s p_s dx_s = 0 . \tag{5.2}$$

Assumiamo come variabili π_s quelle definite dalle relazioni

$$\pi_s = \sum_1^k{}_i f_{is} p_i, \text{ per } s = 1, 2, \ldots, k; \ \pi_s = p_s, \text{ per } s = k+1, \ldots, n, \tag{5.3}$$

dove per semplicità si è posto

$$f_{is} = B_{is}/B . \tag{5.4}$$

Inoltre riterremo $\xi_s = x_s$ per $s = k+1, \ldots, n$.

Sostituendo nella (5.2) si ha

$$\sum_1^k{}_s \left(\sum_1^k{}_i f_{is} p_i \right) d\xi_s - \sum_1^k{}_i p_i dx_i = \sum_1^k{}_i \left(\sum_1^k{}_s f_{is} d\xi_s - dx_i \right) p_i = 0 ,$$

da cui segue

$$\sum_1^k{}_s f_{is} d\xi_s = dx_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{5.5}$$

Si ha pertanto

$$f_{is} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s}$$

e quindi

$$\pi_s = \sum_1^k{}_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s} p_i, \quad (s = 1, 2, \ldots, k) . \tag{5.6}$$

Risolvendo le (5.5) rispetto alle $d\xi_s$, e ricordando la (5.4), si ha inoltre

$$d\xi_s = \sum_1^k{}_i X_i^{(s)}(x_i)\, dx_i, \quad (s = 1, 2, \ldots, k) ,$$

e perciò le nuove variabili ξ_s, per $s = 1, 2, \ldots, k$, coniugate delle $\pi_s = \alpha_s$, $(s = 1, 2, \ldots, k)$, sono date da

$$\xi_s = \sum_1^k{}_i \int X_i{}^{(s)}(x_i) dx_i, \quad (s = 1, 2, \ldots, k) . \tag{5.7}$$

Concludendo, la trasformazione definita dalle

$$(5.8)\quad \begin{aligned} &\pi_s = \sum_1^k{}_i \frac{B_{is}}{B} p_i = \alpha_s, \ (s = 1, 2, \ldots, k)\,; \ \pi_s = p_s, \ (s = k+1, \ldots, n) \\ &\xi_s = \sum_1^k{}_i \int X_i^{(s)}(x_i) dx_i, \ (s = 1, 2, \ldots, k)\,; \ \xi_s = x_s, \ (s = k+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

trasforma il sistema canonico (1.5), corrispondente alla prima soluzione, in un nuovo sistema canonico con k variabili ignorate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, che ammette gli integrali dei momenti $\pi_s = \alpha_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$.

È opportuno vedere ancora come si trasforma la funzione hamiltoniana H nel nuovo sistema canonico. Per questo osserviamo che si può scrivere

$$H = (T_1) + (T_2) + (T_1) - U,$$

con

$$(T_1) = \frac{1}{2} \sum_1^k{}_{ij} a^{ij} p_i p_j\,; \quad (T_2) = \sum_{k+1}^n{}_i \sum_1^k{}_j a^{ij} p_i p_j\,; \quad (T_3) = \frac{1}{2} \sum_{k+1}^n{}_i a^{ii} p_i^2$$

$$U = \frac{1}{\mathcal{H}} \sum_{k+1}^n{}_i U_i(x_i)\,; \quad U_i = \sum_1^k{}_s b_s K_i^{(s)}(x_i) + \Phi_i(x_i)\,,$$

ed in virtù delle (2.5) si ha:

$$(T_1) = \frac{1}{2\,\mathcal{H}} \sum_1^k{}_{ij} \sum_1^k{}_s \frac{B_{is}}{B} \left\{ \frac{B_{js}}{B} \sum_{k+1}^n{}_t K_t^{(s)}(x_t) + \sum_{k+1}^n{}_l \sum_1^k{}_r \frac{B_{jr}}{B} \frac{X_l^{(r)} X_l^{(s)}}{\Psi_l(x_l)} \right\} p_i p_j =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathcal{H}} \left\{ \sum_1^k{}_s \sum_1^k{}_{ij} \frac{B_{is}}{B} p_i \cdot \frac{B_{js}}{B} p_j \sum_{k+1}^n{}_t K_t^{(s)}(x_t) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^k{}_{rs} \sum_1^k{}_{ij} \frac{B_{is}}{B} p_i \cdot \frac{B_{jr}}{B} p_j \sum_{k+1}^n{}_l \frac{X_l^{(r)} X_l^{(s)}}{\Psi_l(x_l)} \right\},$$

cioè

$$(T_1) = \frac{1}{2\,\mathcal{H}} \left\{ \sum_1^k{}_s \alpha_s^2 \sum_{k+1}^n{}_t K_t^{(s)}(x_t) + \sum_1^k{}_{rs} \alpha_r \alpha_s \frac{X_l^{(r)} X_l^{(s)}}{\Psi_l(x_l)} \right\},$$

la quale mostra che in (T_1) le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sono scomparse.

Così pure si ha

$$(T_2) = -\frac{1}{\mathcal{H}} \sum_{k+1}^n{}_i p_i \sum_1^k{}_s \frac{X_i^{(s)}}{\Psi_i} \sum_1^k{}_j \frac{B_{js}}{B} p_j = -\sum_1^k{}_s \alpha_s \sum_{k+1}^n{}_i \frac{X_i^{(s)}}{\Psi_i} p_i\,,$$

e quindi anche (T_2) è indipendente da $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Infine è evidente che anche (T_3) ed U risultano indipendenti da $x_1, x_2, \ldots, x_k$, e in definitiva la funzione hamiltoniana ridotta risulta

$$(5.9)\quad \bar{H} = \frac{1}{\mathcal{K}}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{1}{\Psi_i}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_s\, \alpha_s^2 \sum_{k+1}^{n}{}_t\, K_t^{(s)}(x_t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k+1}^{n}{}_i\left[\sum_1^k{}_s\, b_s K_i^{(s)}(x_i) + \Phi_i(x_i)\right]\right\}.$$

Il sistema canonico (1.5), di rango $2n$, si trasforma quindi nel nuovo sistema canonico ridotto

$$(5.10)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i},\quad (i = k+1, \ldots, n)\,,$$

che è di rango $2(n-k)$. Esso ammette gli $n-k$ integrali quadratici

$$(5.11)\qquad F_i \equiv \frac{1}{2\Psi_i}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_s\, \alpha_s^2 K_i^{(s)}(x_i) - U_i - h\mathcal{K}_i = \beta_i\,,$$

$$(i = k+1, \ldots, n)\,,$$

che non sono altro che gli integrali (2.12), dove la somma delle costanti β_i è nulla; quindi di quelle costanti ne sono arbitrarie soltanto $n-k-1$.

Questi integrali, ciascuno dei quali dipende da una sola coppia di variabili coniugate (x_i, p_i), sono ovviamente a due a due in involuzione e risolubili rispetto ai momenti p_i. I sistemi in esame, in base a un teorema di Lionville, si integrano quindi completamente mediante quadrature e operazioni in termini finiti, come del resto risulta dall'applicazione del teorema di Jacobi.

Gli integrali (5.11) implicano l'integrale dell'energia. Invero sommando rispetto all'indice i da $k+1$ ad n, poiché $\sum_{k+1}^{n}{}_i\, \beta_i = 0$, si ottiene

$$\sum_{k+1}^{n}{}_i\, F_i \equiv \frac{1}{2}\sum_{k+1}^{n}{}_i \frac{1}{\Psi_i}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_s\, \alpha_s^2 \sum_{k+1}^{n}{}_i K_i^{(s)}(x_i) - \sum_{k+1}^{n}{}_i U_i - h\mathcal{K} = 0.$$

Si ha cioè la relazione

$$\sum_{k+1}^{n}{}_i\, F_i = \mathcal{K}(\bar{H} - h) = 0\,,$$

da cui segue $\bar{H} = h$, che è proprio l'integrale dell'energia.

b) Se ora dell'equazione di Hamilton-Jacobi, integrabile per separazioni di variabili, consideriamo la *seconda soluzione*, le equazioni cano-

niche corrispondenti ammettono (n. 3), i seguenti k integrali lineari nei momenti:

$$(5.12)\qquad p_i = \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

e gli $n - k$ integrali quadratici

$$(5.13)\qquad \frac{1}{2}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 - U_i = h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j\, \beta_j \varphi_{ji}\,,$$

dove le α_s sono delle costanti che si possono assumere ad arbitrio, e le β_j sono pure $n - 1$ costanti legate alle α_s, alle costanti del problema e alla costante h dell'energia dalle relazioni (3.12):

$$2\left(b_i + hc_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j\, \beta_j c_{ji}\right) = \alpha_i^2, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Delle costanti β_i ne possono dunque essere fissate ad arbitrio $n - k - 1$. Anche in questo caso, risolvendo le (5.12) rispetto alle costanti α_s, e introducendo i momenti

$$(5.14)\qquad \pi_s = \sum_1^k{}_i\, \frac{B_{is}}{B}\, p_i = \alpha_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

la trasformazione puntuale definita da relazioni analoghe alle (5.8), trasforma il sistema canonico associato alla seconda soluzione, in un sistema canonico con funzione caratteristica avente k coordinate ignorabili.

In questo secondo caso si ha

$$(T_1) = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_s\, \alpha_s^2 \varphi^{nr} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n{}_l\, \varphi^{nl} \sum_1^k{}_{rs}\, \alpha_r \alpha_s X_l{}^{(r)} X_l{}^{(s)}\,;$$

$$(T_2) = -\sum_{k+1}^n{}_i\, \varphi^{ni} p_i \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i{}^{(s)}\,; \quad (T_3) = \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n{}_i\, \varphi^{ni} p_i^2\,,$$

e la funzione caratteristica ridotta risulta quindi

$$(5.15)\qquad \overline{H} = \frac{1}{2}\sum_1^k{}_s\, \alpha_s^2 \varphi^{ns} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}^n{}_i\, \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_1^k{}_s\, \alpha_s X_i{}^{(s)}\right]^2 -$$

$$- \left[\sum_1^k{}_s\, b_s \varphi^{ns} + \sum_{k+1}^n{}_s\, U_s(x_s) \varphi^{ns}\right].$$

Il sistema canonico ridotto, che è analogo al sistema (5.10), è di rango $2(n - k)$ ed ammette gli $n - k$ integrali quadratici (5.13). In virtù di essi il sistema, come sappiamo, si integra con quadrature.

Da questi integrali segue anche facilmente l'integrale dell'energia. Invero, moltiplicando ambo i membri della (5.13) per φ^{ni}, e sommando rispetto all'indice i da $k+1$ ad n, si ottiene

$$(5.16)\quad \frac{1}{2}\sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_1^k{}_s \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 - \sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni} U_i = \sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\left(h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j \beta_j \varphi_{ji}\right).$$

Ora, posto

$$\Phi_i = h\varphi_{ni} + \sum_1^{n-1}{}_j \beta_j\varphi_{ji}\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

possiamo scrivere

$$\sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\Phi_i = \sum_1^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\Phi_i - \sum_1^{k}{}_i\, \varphi^{ni}\Phi_i\,.$$

Ma per la (3.7′) e la (3.8) è

$$\sum_1^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\Phi_i = h\,; \quad \Phi_i = \frac{1}{2}(\alpha_i^2 - 2b_i), \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

perciò la (5.16) diventa

(5.17)

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}\left[p_i - \sum_1^k{}_s \alpha_s X_i^{(s)}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_1^{k}{}_i\, \alpha_i^2\varphi^{ni} - \left[\sum_1^{k}{}_i b_i\varphi^{ni} + \sum_{k+1}^{n}{}_i\, \varphi^{ni}U_i\right] = h\,,$$

che è proprio l'integrale dell'energia.

RIFERIMENTI

[1] P. Stäckel, *Habilitationsschrift* (Hale), 1891, « Mathematische Annalen », 42 (1893), pp. 537-543.

[2] T. Levi-Civita, *Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, « Math. Ann. », 59 (1904), pp. 383-397.

[3] F. B. Dall'Acqua, *Sulla integrazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili*, « Math. Ann. », 56 (1908), p. 398.

[4] P. Burgatti, *Determinazione delle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili*, « Rend. R. Accad. Lincei », serie V, 20 (1931), pp. 108-111.

[5] C. Agostinelli, *Sopra l'integrazione per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*, « Memorie R. Accademia delle Scienze di Torino », Serie II, 59, Parte I (1937), pp. 3-54.

[6] C. Agostinelli, *Sulle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili*, « Atti R. Istituto Veneto », 96 (1936-37), Parte II, pp. 151-161.

[7] C. Agostinelli, *Su nuovi casi di integrabilità per separazione di variabili dell'equazione dinamica di Hamilton-Jacobi*. Note I e II, « Rendiconti Accad. Naz. Lincei », serie VIII, vol. VII, fasc. 5 e 6 (1974).

[8] C. Agostinelli, *Su alcune proprietà dei sistemi canonici integrabili per separazione di variabili*, « Idem », vol. VIII (1975).

[9] E. T. Whittaker, *Analitical Dynamics*, chap. XI, n. 132. Cambridge University Press (1927).

[illegible]

C. CATTANEO (*)

Teoremi di conservazione in relatività ristretta e generale.

Riassunto. — *Si esamina criticamente la portata del metodo delle trasformazioni infinitesime in relatività ristretta e generale. Si spiega in particolare perché il metodo, molto potente se applicato a una teoria di campo convenzionale, perde gran parte della sua efficacia nella teoria gravitazionale einsteiniana.*

È ben noto quanta importanza abbiano in fisica le leggi di conservazione. Un teorema scoperto da E. Noether nel 1918 ha messo in evidenza che l'esistenza di leggi di conservazione per una sistema fisico è sistematicamente legata a proprietà di invarianza formale delle equazioni che regolano l'evoluzione del sistema stesso. L'importanza del teorema si è imposta all'attenzione dei fisici e ha dato origine a un vero metodo per la ricerca di oggetti conservativi: il metodo delle trasformazioni infinitesime. Si tratta di un metodo generale e potente che è da considerare una delle acquisizioni di rilievo della fisica matematica moderna. Tuttavia allorché questo metodo è stato applicato a un certo ambito della relatività generale esso non ha corrisposto alle aspettative e ha dato risultati fisicamente deludenti, almeno in parte.

In una analisi critica che ho svolto alcuni anni or sono ho cercato di mettere a fuoco ipotesi e limiti di applicabilità del metodo, chiarendo perché esso non ha dato i risultati sperati in relatività generale. In questa mia relazione mi propongo di presentare i punti salienti di quella mia analisi, ma fin da ora mi scuso se i limiti di tempo mi imporranno un'esposizione molto incompleta.

(*) Università di Roma.

1. — L'identità fondamentale.

Consideriamo un generico campo fisico ambientato nello spazio tempo V^4 della relatività generale, che potrà eventualmente ridursi allo spazio tempo M^4 di Minkowski. Diremo (x^i) un sistema di coordinate locali e converremo che la metrica di universo $ds^2 \equiv g_{ik}dx^i dx^k$ abbia segnatura $(+++-)$. Il campo fisico sia rappresentato da certe variabili di campo $u^A(x)$, che generalmente saranno componenti di uno o più tensori. Come sempre accade, supporremo che l'evoluzione del campo sia retta da un principio variazionale.

Indichiamo con $\mathfrak{L}$ la lagrangiana del campo e con $\mathcal{A} \equiv \int_C \mathfrak{L}\, d^4x$ l'integrale di azione. Per non complicare le cose supporremo che $\mathfrak{L}$ contenga le u^A e le loro derivate prime $u^A{}_{,r}$ ma non derivate di ordine superiore. Dal principio variazionale

$$(1) \qquad \delta\mathcal{A} = 0\,, \qquad \delta u^A = 0 \qquad \ldots \mathcal{F}C$$

discendono le equazioni di campo

$$(1.2) \qquad \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta u^A} \equiv \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u^A} - \partial_k \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u^A{}_{,k}} = 0$$

che si ottengono ponendo uguali a zero le derivate funzionali di $\mathfrak{L}$ rispetto alle u^A. Come è noto queste derivate funzionali, e quindi le stesse equazioni di campo, godono della cosiddetta *invarianza di gauge*: esse non cambiano se la lagrangiana $\mathfrak{L}$ viene sostituita da una nuova lagrangiana $\mathfrak{L}'$ che ne differisca per un termine del tipo divergenza $\partial_a H^a$, $H^a \equiv H^a(u^A)$:

$$(1.3) \qquad \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + \partial_a H^a.$$

È bene prevedere il caso, molto importante, che oltre alle variabili di campo u^A la lagrangiana $\mathfrak{L}$ contenga anche le componenti g^{lm} del tensore metrico (da non sottoporre a variazione), presenza che ha carattere sistematico se si fa uso di coordinate generali. Le chiameremo variabili *ambientali*, perché si riferiscono all'ambiente in cui ha sede il campo. Per un momento soltanto accomuneremo le variabili u^A e g^{lm} in un'unica notazione: V^A.

Sulla lagrangiana $\mathfrak{L}$ ammetteremo le seguenti ipotesi strutturali:

I. – *Come funzione delle (x^i), per il tramite delle V^A e delle $V^A{}_{,r}$, la $\mathfrak{L}$ si comporti come una densità scalare rispetto a un gruppo G di trasformazioni (per esempio il gruppo di Lorentz, oppure il gruppo delle trasformazioni generali).*

Ciò significa supporre che l'integrale di azione sia una quantità scalare.

II. – *Come funzione delle V^A e delle $V^A{}_{,r}$, la $\mathfrak{L}$ sia formalmente invariante*

(cioè conservi la stessa espressione analitica) in ogni trasformazione di coordinate appartenenti ad un gruppo a un parametro $G_1[\xi]$, che sia sottogruppo di G.

N.B. – Il sottogruppo G_1 può non essere unico. Con $\vec{\xi}(x)$ intendiamo indicare il campo di vettori generatore del gruppo G_1.

Dalla prima ipotesi discende che la variazione in forma subita dalla lagrangiana per effetto di una qualunque trasformazione infinitesima del gruppo G, e in particolare di G_1, è quella che compete a una densità scalare. Se si rammenta da un lato il legame tra variazione in forma rispetto alle trasformazioni infinitesime di un gruppo e derivata di Lie subordinata al gruppo medesimo, dall'altro la espressione esplicita della derivata di Lie per una densità scalare, dalla ipotesi I discende

$$\text{I} \Longrightarrow X_\xi \mathfrak{L} = (\mathfrak{L}\xi^r)_{,r} \tag{1.4}$$

[X_ξ, o più semplicemente X, derivazione di Lie rispetto al campo di vettori $\vec{\xi}(x)$].

Dalla seconda ipotesi si trae che la medesima variazione in forma di $\mathfrak{L}$ non può provenire altro che dalle variazioni in forma subìte dalle funzioni V^A e $V^A{}_{,r}$; si deve avere pertanto:

$$\text{II} \Longrightarrow X_\xi \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial V^A} X V^A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial V^A{}_{,r}} (X V^A)_{,r} \,. \tag{1.5}$$

Uguagliando le due espressioni precedenti si ricava l'identità

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial V^A} X V^A + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial V^A{}_{,r}} (X V^A)_{,r} \equiv (\mathfrak{L}\xi^r)_{,r} \tag{1.6}$$

valida per ogni possibile scelta delle funzioni $V^A(x)$. Possiamo dare una forma più maneggevole all'identità (1.6) facendovi figurare a primo membro le derivate variazionali $\delta\mathfrak{L}/\delta V^A$ in luogo delle semplici derivate parziali. Fatto il piccolo aggiustamento necessario e tornando, ormai definitivamente, a distinguere nelle funzioni V^A le variabili di campo u^A dalle variabili ambientali g^{lm}, l'identità fondamentale si scriverà nella forma

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u^A} X u^A + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{lm}} X g^{lm} \equiv \left(\mathfrak{L}\xi^r - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^A{}_{,r}} X u^A - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{lm}{}_{,r}} X g^{lm} \right)_{,r} . \tag{1.7}$$

Si tratta ancora, lo ripetiamo, di un'identità che sussiste per ogni possibile scelta delle funzioni $u^A(x)$ e $g^{lm}(x)$. Invece il campo vettoriale $\vec{\xi}$ è quello (o uno di quelli) rispetto al quale è verificata l'ipotesi II. Fino a questo momento non si è tenuto conto delle equazioni di campo.

L'identità (1.7), come le ipotesi I e II da cui essa dipende, ha un carattere generale perché essa sussiste in tutte le situazioni fisiche cono-

sciute. Naturalmente caso per caso si dovrà precisare qual'è il gruppo G rispetto al quale sussiste l'ipotesi I e quale è il sottogruppo G_1 (eventualmente non unico) che interviene nell'ipotesi II. Caso per caso le ipotesi I e II potranno anche essere completate da qualche ipotesi aggiuntiva che permetterà di utilizzare l'identità di base (1.7) in direzioni diverse.

2. — Teoria di campo convenzionale ambientata in M^4 e formulata in coordinate rettangolari.

Cominciamo col considerare una teoria di campo convenzionale ambientata in relatività ristretta e soddisfacente pertanto al principio einsteiniano di relatività. Supponiamo inoltre che la teoria sia formulata in coordinate rettangolari di M^4. Questo equivale ad ammettere che la lagrangiana $\mathfrak{L}(u^A, u^A{}_{,r})$ sia densità scalare rispetto alle trasformazioni del gruppo di Lorentz e sia formalmente invariante rispetto al gruppo medesimo, senza l'intervento di variabili ambientali. In altri termini $G \equiv$ gruppo di Lorentz, $G_l \equiv$ qualunque sottogruppo di G. In queste ipotesi nell'identità fondamentale (1.7) vengono a mancare il secondo e l'ultimo gruppo di termini.

Ciò premesso, teniamo conto delle equazioni di campo (1.2) che fino a questo momento abbiamo ignorato. L'uguaglianza (1.7) cessa allora di essere un'identità per divenire una conseguenza delle equazioni di campo. Questa conseguenza esprime una legge di conservazione:

$$\partial_r \tau^r = 0\,, \qquad \tau^r \equiv \mathfrak{L}\xi^r - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^A{}_{,r}} X_\xi u^A\,. \tag{2.1}$$

L'ente conservativo τ^r è costituito con le variabili di campo u^A, le loro derivate prime e mediante il campo vettoriale $\vec{\xi}(x)$. Se le u^A hanno carattere tensoriale (rispetto a G) τ^r è un vettore controvariante.

Il campo vettoriale $\vec{\xi}(x)$ è vincolato ad essere generatore di un sottogruppo di Lorentz: per es. quelle delle traslazioni secondo uno degli assi, spaziali o temporale; quello delle rotazioni attorno a uno degli assi spaziali, quello delle trasformazioni speciali di Lorentz secondo l'uno o l'altro degli assi spaziali. Le scelte indipendenti sono *dieci* ed hanno notissime interpretazioni: conservazione delle quantità di moto, dell'energia, dei momenti angolari, dei moti baricentrali.

Le prime quattro equazioni di conservazione, quelle cioè relative alle quattro traslazioni si possono compendiare in un'unica formula tensoriale

$$\partial_k \tau_i^k = 0, \qquad \tau_i^k \equiv \mathfrak{L}\delta_i^k - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^A{}_{,k}} u^A{}_{,i}\,. \tag{2.2}$$

Il tensore conservativo $\tau_i{}^k$ che così si ottiene, e nel quale resta disponibile una costante moltiplicativa, viene comunemente chiamato *tensore*

canonico di energia e impulso del campo. Su questo tensore torneremo tra un momento.

3. — Teoria di campo convenzionale ambientata in relatività generale e formulata in coordinate generali.

Continuiamo a considerare una teoria di campo convenzionale ma in ipotesi più ampia. Precisamente supporremo: 1) che essa possa essere ambientata in una varietà spazio-temporale curva (senza però escludere il caso minkowskiano); 2) che essa sia formulata in coordinate generali. La seconda ipotesi non implica alcuna limitazione fisica: essa è una condizione sempre realizzabile, imposta dalla prima ipotesi. Va però puntualizzato che questa formulazione impone che nella lagrangiana $\mathfrak{L}$ siano presenti, accanto alle variabili di campo, anche le variabili ambientali: $\mathfrak{L}(u^A, u^A{}_{.r}, g^{lm})$.

In queste condizioni le ipotesi I e II sono soddisfatte per tutte le possibili trasformazioni di coordinate sicché l'uguaglianza fondamentale (1.7) sussiste non soltanto per scelte arbitrarie dalle funzioni $u^A(x)$ *e* $g^{lm}(x)$ ma anche per ogni possibile scelta del campo di vettori $\vec{\xi}(x)$. Ciononostante nella situazione attuale le equazioni di campo (1.2) non bastano a trasformare l'identità in una equazione di conservazione. Il risultato si ottiene invece se oltre alle ipotesi strutturali ammesse per $\mathfrak{L}$, si ammette un'ipotesi supplementare per la varietà V^4:

III. – *La varietà spaziotemporale V^4 ammette un vettore di Killing $\vec{\xi}(x)$.*

L'ipotesi, come sappiamo, implica $X_\xi g^{lm} = 0$; in conseguenza di ciò una volta che siano soddisfatte le equazioni di campo $(\delta\mathfrak{L}/\delta u^A/ = 0$, l'identità (1.7) dà luogo all'equazione di conservazione

$$\partial_r \tau^r = 0 \,, \qquad \tau^r \equiv \mathfrak{L}\xi^r - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^A{}_{.r}} X_\xi u^A \tag{3.1}$$

dove ancora una volta il vettore conservativo τ^r è costruito mediante le u^A e le $u^A{}_{.r}$ ma con l'intervento esplicito del vettore di Killing $\vec{\xi}(x)$. Perché dunque un campo fisico convenzionale ambientato in relatività generale ammetta un'equazione di conservazione non basta che la lagrangiana abbia proprietà di invarianza rispetto a un gruppo G_1 ma occorre che rispetto al medesimo gruppo sia invariante anche la varietà ambiente, con tutte le sue proprietà metriche.

Se noi ritorniamo per un momento ai risultati che abbiamo ricavato per una teoria ambientata nello spazio-tempo piatto di Minkowski e formulata in coordinate lorentziane, può sembrare che questi siano stati ottenuti senza l'intervento dell'ipotesi III. In verità questa ipotesi era implicita: infatti se la varietà spazio temporale è uno spazio-tempo piatto

di Minkowski, questo ammette non uno soltanto ma dieci vettori di Killing. E dieci appunto erano le equazioni di conservazione che avevamo trovato.

4. — Tensione energia-impulso metrico.

Fermiamoci ancora un momento nel caso minkowskiano e più precisamente sul tensore canonico τ_i^k dato dalle $(2.2)_2$. Come abbiamo ricordato, questo viene correntemente interpretato come espressione del contenuto locale del campo in energia e quantità di moto. Questa interpretazione è suffragata da due circostanze: (*a*) esso è costruito mediante le variabili di campo u^A e le loro derivate prime, cioè da elementi che, essendo lasciati *inizialmente* disponibili dalle equazioni di campo, ben si prestano a rappresentare lo *stato* del sistema fisico; (*b*) esso soddisfa all'equazione di conservazione $(2.2)_1$, fatto anche questo ben plausibile per un campo non interagente con altri campi. Per contro l'interpretazione è resa dubbia da altre due circostanze: (*c*) il fatto che esso non ha una determinazione univoca, non godendo dell'invarianza di gauge (*d*) non è detto che, quando i suoi due indici sono portati allo stesso livello, esso risulti simmetrico. Ciò invece sembrerebbe essere necessario almeno se si vuole che alla conservazione dell'energia e della quantità di moto si associ anche la conservazione del momento angolare.

Ciò lascia qualche dubbio sul reale contenuto fisico del tensore canonico.

In verità affinché un ente possa ritenersi veramente rappresentativo del contenuto locale del campo in energia e quantità di moto sembra ragionevole richiedergli i requisiti seguenti: 1) essere una entità *tensoriale* T^{ik} in modo che le definizioni locali di densità di energia e di quantità di moto abbiano i dovuti caratteri di invarianza rispetto a un cambiamento locale del riferimento spaziale; 2) dipendere dalle variabili di campo u^A e dalle loro derivate prime $u^A{}_{,r}$ ma non dalle derivate seconde; 3) soddisfare in conseguenza delle equazioni di campo ad un'equazione di evoluzione $\nabla_k T^{ik} = 0$, che nel caso minkowskiano equivalga a equazioni di conservazione per l'energia e per la quantità di moto; 4) *essere simmetrico* in modo che nel caso minkowskiano si abbia anche conservazione del momento angolare; 5) essere invariante nel passaggio da una lagrangiana $\mathfrak{L}$ ad un'altra equivalente $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + \partial_a H^a$.

Ebbene il metodo delle trasformazioni infinitesime permette di ricavare in modo univoco un ente possedente i cinque requisiti. Ancora una volta poniamoci in una teoria di campo formulata in coordinate generali e consideriamo l'identità fondamentale (1.7), che sussiste per una scelta arbitraria non soltanto delle $u^A(x)$ e delle $g^{lm}(x)$ ma anche del campo vettoriale $\vec{\xi}(x)$. Fissiamo in V^4 una regione quadridimensionale C e ivi scegliamo le funzioni $\xi^r(x)$ in modo completamente arbitrario salvo la condizione che esse si annullino sulla frontiera assieme alle loro derivate

prime

$$\xi^r = 0\,, \qquad \xi^r{}_{,s} = 0 \qquad \ldots \mathcal{F}C\,.$$

Questa condizione implica che sulla frontiera medesima si ha

$$X_\xi W^A = 0 \qquad \ldots \mathcal{F}C$$

qualunque sia l'oggetto geometrico W^A. Ciò posto, se noi integriamo su C l'identità fondamentale (1.7), il secondo membro non dà alcun contributo sicché rimane:

$$\int \left(\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u^A} X u^A + \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g^{rs}} X g^{rs} \right) d^4x = 0\,. \tag{4.1}$$

Teniamo ora conto delle equazioni di campo $(\delta\mathfrak{L}/\delta u^A) = 0$ e sostituiamo a Xg^{rs} la sua espressione $-\ (\nabla^r \xi^s + \nabla^s \xi^r)$. Dopo un'integrazione per parti e la conseguente eliminazione di un integrale di frontiera, rimane

$$\int_{\mathfrak{I}} \nabla_r \left(\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ri}} \right) \xi^r d^4x = 0\,.$$

Se si tiene presente la completa arbitrarietà delle ξ^r all'interno di C si deduce l'uguaglianza locale:

$$\nabla_r \left(\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ri}} \right) = 0\,. \tag{4.2}$$

Siamo arrivati in tal modo a riconoscere che l'oggetto

$$T^{ir} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{ri}} \tag{4.3}$$

soddisfa alla condizione 3). Ma è facile riconoscere che esso soddisfa a tutti i requisiti voluti: è un vero tensore; si costruisce mediante le u^A e le loro derivate prime; è simmetrico; gode della invarianza di gauge. Si tratta quindi di un ente che veramente può vantare seri diritti quale rappresentante del contenuto locale del campo in energia e quantità di moto. Ad esso si suol dare il nome di *tensore energia-impulso metrico*. Come si è visto, il metodo delle trasformazioni infinitesime permette di ricavare questo tensore in modo univoco, partendo dalla lagrangiana del campo purché detta lagrangiana si sia preventivamente espressa in coordinate generali, e quindi anche con l'intervento delle variabili ambientali g_{ik}.

Naturalmente in molti casi il tensore canonico e il tensore metrico coincidono. Generalmente ciò accade se la lagrangiana impiegata per la costruzione del tensore canonico, scelta tra le infinite lagrangiane « equi-

valenti » ha essa stessa un chiaro significato fisico. Resta invece del tutto indifferente alla scelta predetta la costruzione del tensore metrico.

Se la varietà spazio-temporale è curva, l'equazione (4.2) non implica conservazione di alcuna grandezza fisica. Il fatto è fisicamente ben naturale dato che in uno spazio-tempo curvo il nostro campo convenzionale non può considerarsi un sistema fisicamente isolato dal momento che esso è soggetto all'azione esterna di un campo gravitazionale.

Ma anche ora è evidente che un'equazione di conservazione sussiste se la V^4 ammette un vettore $\vec{\xi}(x)$ di Killing $(\nabla_h \xi_k + \nabla_k \xi_h = 0)$. Infatti in tal caso dalla (4.2) si ricava $\nabla_k(\xi_h T^{hk}) = 0$, che si può effettivamente scrivere in forma di equazione di conservazione: $\partial_k(\sqrt{-g}\, \xi_h T^{hk}) = 0$.

5. — Il metodo delle trasformazioni infinitesime nella teoria gravitazionale einsteiniana.

Quando da una teoria convenzionale si passa alla teoria del campo gravitazionale einsteiniano si presenta il fatto nuovo che nella lagrangiana le componenti del tensore metrico g^{ik} intervengono non soltanto come variabili ambientali ma anche come variabili di campo. Questa circostanza nuova fa perdere molto significato ad alcuni dei risultati precedenti.

Ricordiamo il principio variazionale dal quale si possono dedurre le equazioni gravitazionali nelle regioni vuote. Esso si esprime

$$\delta \int_C R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \tag{5.1}$$

dove R_{ik} indica il tensore contratto di curvatura spazio-temporale

$$R_{ik} \equiv \partial_k \Gamma^l_{il} - \partial_l \Gamma^l_{ik} + \Gamma^r_{il} \Gamma^l_{kr} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^l_{rl} .$$

Le variazioni delle funzioni g^{ik} e delle loro derivate prime si intendono vincolate ad annullarsi sulla frontiera di C

$$\delta g^{ik} = 0\,, \qquad \delta g^{ik}{}_{,r} \qquad \ldots \mathcal{F}C\,.$$

Le conseguenze locali del principio variazionale (5.1) sono le notissime equazioni gravitazionali nel vuoto

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 0\,. \tag{5.2}$$

Va sottolineato che, nelle dieci funzioni incognite g_{ik}, esse sono equazioni del secondo ordine e ciò malgrado che già la lagrangiana di partenza contenga derivate seconde delle g_{ik}. La spiegazione va cercata nel fatto che la lagrangiana si può decomporre in due parti, una, contenente derivate prime e seconde, avente forma di una divergenza ordinaria, l'altra

contenente soltanto derivate prime. La prima parte a causa della sua forma non contribuisce alla variazione dell'integrale di azione. A questa contribuisce invece la seconda parte, che contiene soltanto derivate prime.

Questa seconda parte ha la forma

$$\mathfrak{L}' \equiv \sqrt{-g}\, g^{ik}(\Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{rl} - \Gamma^r_{il}\Gamma^l_{kr}). \tag{5.3}$$

In altri termini si può dire che la lagrangiana originaria, che è del secondo ordine, ammette delle lagrangiane equivalenti, come la (5.3), che sono del primo ordine. Ciò spiega perché le equazioni gravitazionali sono soltanto del secondo ordine.

L'equivalenza tra le lagrangiane $\mathfrak{L} \equiv \sqrt{-g}R$ ed $\mathfrak{L}'$ implica l'identità dei primi membri delle equazioni di campo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathfrak{L}'}{\delta g^{ik}} \equiv G_{ik}\,. \tag{5.4}$$

Come la lagrangiana originaria $\mathfrak{L}$, anche $\mathfrak{L}'$ è espressa in coordinate del tutto generiche: quindi essa soddisfa all'ipotesi generale II. Per contro, a differenza di $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ non è una densità scalare nel senso completo della parola ma soltanto una densità scalare affine. Tuttavia anche questa sua proprietà ridotta basta, congiuntamente con l'ipotesi II, a garantire la validità della identità fondamentale (1.7).

Vediamo allora quali ne sono le conseguenze in questa nuova situazione.

Cominciamo da quello che abbiamo chiamato tensore energia-impulso metrico, $T^{ik} \equiv (\delta\mathfrak{L}/\delta g_{ik})/\sqrt{-g}$, che, come sappiamo, non dipende dalla scelta della lagrangiana nell'ambito delle lagrangiane equivalenti. Nel caso attuale il tensore si identifica con il primo membro delle equazioni di campo; quindi in virtù delle stesse esso risulta essere sempre nullo. Risulterebbe di qui che al campo gravitazionale puro non sarebbe possibile coordinare un vero tensore energia-impulso.

Il fatto è veramente singolare nell'ambito dei campi fisici ma esso deve verosimilmente considerarsi come una conseguenza, probabilmente inevitabile, della natura tutta speciale del campo gravitazionale einsteiniano.

Vediamo allora se, in mancanza di un tensore energetico metrico esiste almeno qualcosa di analogo al tensore canonico. Riprendiamo allo scopo l'identità fondamentale (1.7); se osserviamo che nel caso attuale la lagrangiana $\mathfrak{L}'$ contiene soltanto le g^{lm} e le loro derivate prime, e teniamo conto delle equazioni di campo $(\delta\mathfrak{L}'/\delta g^{ik}) = 0$, si giunge alle equazioni locali di conservazione

$$\left(\mathfrak{L}'\xi^r - \frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial g^{lm}{}_{,r}}\, X_\xi g^{lm}\right)_{,r} = 0 \tag{5.5}$$

che sussistono per *ogni* scelta del campo vettoriale $\vec{\xi}(x)$. Se si tiene conto

dell'assoluta arbitrarietà di questo campo, attraverso un'analisi un po' minuta che qui omettiamo, si giunge a riconoscere che l'ente a due indici così definito

$$t_i^r \equiv \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial g^{lm}{}_{,r}}\, g^{lm}{}_{,i} - \mathfrak{L}'\delta_i^r\right\} \tag{5.6}$$

possiede le proprietà seguenti:

A) Esso è conservativo, cioè ha divergenza ordinaria nulla: $\partial_k t_i^k = 0$.

B) Esso deriva da un superpotenziale V_i^{rs}

$$t_i^r \equiv \partial_s V_i^{rs}, \quad V_i^{rs} \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial g_{is}^{il}}\, g^{rl}. \tag{5.7}$$

C) Il superpotenziale è antisimmetrico rispetto agli indici superiori

$$V_i^{rs} \equiv - V_i^{sr}. \tag{5.8}$$

L'ente t_i^r sembrerebbe dunque poter assolvere l'ufficio che nel caso dei campi convenzionali viene assolto dal tensore canonico. Senonché alle proprietà anzidette si aggiungono due inconvenienti: 1) l'ente t_i^r non resta invariante se si cambia $\mathfrak{L}'$ nell'ambito delle lagrangiane equivalenti; 2) come $\mathfrak{L}'$, anche t_i^r non ha carattere tensoriale ma ha soltanto il carattere di densità tensoriale affine. Le due circostanze bastano per escludere ogni interpretazione locale dell'ente stesso in termini di densità di energia e di quantità di moto gravitazionali.

I risultati ottenuti sono dunque assai deludenti da un punto di vista locale. Per contro le cose vanno assai meglio da un punto di vista globale. Infatti sotto opportune ipotesi asintotiche l'ente canonico t_i^r, completato dal tensore canonico della materia che genera il campo gravitazionale, permette di costruire quantità globali conservative di indubbio significato fisico. Ma di questo non c'è ora tempo di occuparsi. Il mio scopo era essenzialmente quello di mostrare i limiti di applicabilità del metodo delle trasformazioni infinitesime.

6. — Considerazioni conclusive.

Da quanto precede credo sia emerso abbastanza chiaramente che il metodo delle trasformazioni infinitesime, sicuro e potente se applicato a campi fisici convenzionali, diviene in parte illusorio, almeno sul piano locale, quando viene applicato al campo gravitazionale einsteiniano. Ciononostante molti ricercatori hanno insistito tenacemente in questi tentativi di applicazione, evidentemente nella fiducia che anche il campo gravitazionale, come altri campi fisici, dovesse ammettere, nelle regioni in cui esso non interagisce con altri campi, vere equazioni di conservazione per energia e per quantità di moto.

Ma probabilmente a sostenere questa fiducia ha contribuito anche una convinzione non ben fondata ma diffusa: quella che attribuiva alla covarianza generale del formalismo einsteiniano un contenuto fisico che essa non ha. È ben noto che in relatività ristretta sussiste un *principio di relatività* nel quale si ammette l'esistenza di ∞^3 riferimenti privilegiati — i cosiddetti riferimenti inerziali — che, dall'interno, sono fisicamente indistinguibili l'uno dall'altro. In altri termini nessun esperimento, né meccanico né elettromagnetico né di qualunque altra natura, svolto all'interno di un riferimento inerziale, può permettere di riconoscere in quale di essi ci si trova. In termini matematici il fatto si può esprimere dicendo che in *coordinate galileiane*, cioè in coordinate cartesiane ortogonali di M^4, tanto la metrica spazio-temporale quanto le leggi che reggono i diversi fenomeni fisici, rimangono formalmente invariati di fronte a tutte le trasformazioni di Lorentz. A ben riflettere dunque, le dieci equazioni di conservazione che abbiamo riconosciuto sussistere in una teoria di campo ambientata in relatività ristretta, sono una conseguenza del principio di relatività.

Quando dalla relatività ristretta si è passati alla relatività generale, questa per motivi di principio ha abolito ogni riferimento privilegiato e ha dato diritto di cittadinanza a tutti i possibili riferimenti e a tutti i sistemi di coordinate: in conseguenza di ciò le leggi fisiche hanno necessariamente assunto una forma covariante. Ma una cosa è dare diritto di cittadinanza a tutti i riferimenti, altra cosa è dichiararli tutti fisicamente equivalenti. In verità la relatività generale non stabilisce alcuna equivalenza fisica tra i riferimenti fisici ammissibili né tra una parte di essi; essa ha anzi abolito, in condizioni generali, l'equivalenza parziale che era stata introdotta in relatività ristretta. Soltanto in situazioni speciali, subordinate a particolari ipotesi di simmetria dello spazio-tempo V^4 (quali sussistono ad esempio per lo spazio-tempo M^4 della relatività ristretta) un principio fisico di relatività può essere in parte ripristinato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Einstein, Berlin Ber., **42** (1916).
[2] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch. (1918).
[3] E. Noether, Gottingen Nachr. (1918).
[4] F. Klein, Nachr. Ges. Gottingen (1918).
[5] V. A. Fock, Revs. Modern Phys., **29** (1957).
[6] A. Trautman, Bull. Acad. Polon. Sci., **5** (1957).
[7] A. Lichnerowicz, Géometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris (1958).
[8] C. Cattaneo, Annales Inst. Henri Poincaré, **4** (1966).
[9] C. Cattaneo, Invarianza e conservazione, Rendiconti Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. XXXIX (1969).

DIONIGI GALLETTO (*)

Meccanica newtoniana e cosmologia.

Riassunto. — *Vengono brevemente esaminati alla luce della meccanica newtoniana alcuni elementi di cosmologia, con particolare riguardo al fenomeno dell'espansione dell'Universo e alla legge di Hubble. La trattazione è preceduta da una breve introduzione a carattere storico-critico, da Newton ad oggi, relativa alla conoscenza dell'Universo e ad alcuni fra i più noti modelli cosmologici.*

La possibilità di fisicamente reperire un riferimento assoluto era legata, nella concezione newtoniana, alla convinzione, in parte di origine metafisica, che le stelle, ed il Sole con esse, fossero « fisse ». La scoperta da parte di Halley (1718, nove anni prima della morte di Newton) che le stelle non sono fisse, pur non togliendo sostanzialmente nulla alla meccanica newtoniana, implicava, come ovvia conseguenza, l'impossibilità a rigore di parlare di riferimenti assoluti fisicamente reperibili. La possibilità di fisicamente reperire siffatti riferimenti parve risorgere con la scoperta delle nebulose e con l'ipotesi che esse fossero, almeno in parte, extragalattiche, assieme all'assunzione che l'Universo, nella sua globalità, fosse statico.

Un'assunzione che non valsero a porre in dubbio nemmeno le considerazioni di de Chéseaux (1744) [2] e di Olbers (1823-1826) [18] conducenti al famoso paradosso che porta il nome di quest'ultimo: in un Universo statico la notte non sarebbe buia. Su questo paradosso non si è riflettuto a sufficienza nel secolo scorso, perché altrimenti si sarebbe potuto prevedere teoricamente il fenomeno dell'espansione dell'Universo cent'anni prima della sua scoperta attraverso l'osservazione.

Enunciando la legge di gravitazione universale e ponendo le basi del calcolo differenziale ed integrale, Newton aveva preparato gli strumenti per poter sviluppare, nell'ambito della sua meccanica, una teoria cosmologica: stranamente, nonostante i grandi progressi compiuti dall'astronomia

(*) Università di Torino.

nel XVIII e XIX secolo ed al grande interesse rivolto ai problemi di meccanica celeste dai massimi matematici dell'epoca, soltanto alla fine del secolo scorso un tentativo in tal senso venne compiuto ad opera dell'astronomo Seeliger nel 1895-1896 [21], [22]. Tracce di tentativi del genere non si trovano nemmeno nell'opera di Poincaré, tra l'altro autore del celebre trattato *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, nel quale sono passate in rassegna le teorie riguardanti la formazione del sistema solare che sono state formulate sino agli inizi di questo secolo.

Seeliger nella sua teoria suppone l'Universo, oltre che statico, infinito nello spazio e nel tempo, con una densità stellare mediamente costante. Tali assunzioni, oltre che ad essere contraddette dal paradosso di Olbers, portano a conseguenze inaccettabili dal punto di vista della teoria del potenziale newtoniano e per ovviare ad esse C. Neumann [17] e H. Seeliger [21], [22] apportarono una modificazione alla legge di Newton introducendo un termine aggiuntivo traducente un fenomeno di repulsione cosmica che risulterebbe apprezzabile soltanto a grandi distanze. È questo uno dei tanti esempi di manomissione a cui, sin dai tempi della sua scoperta, è stata sottoposta la legge di gravitazione universale, grande pilastro della meccanica newtoniana.

È il caso comunque di ricordare che il termine correttivo introdotto da Neumann e Seeliger ricorda quello che Einstein fu costretto ad introdurre nel 1917 [6] sviluppando il suo modello cosmologico relativistico statico e che compare anche nel modello, sempre relativistico, sviluppato quasi contemporaneamente da de Sitter [4], [5].

* * *

Risale al 1912, quando ancora non era chiaro se le nebulose a spirale fossero all'interno o all'esterno della nostra Galassia, la prima osservazione che queste sono in movimento. Cadeva così ancora una volta la possibilità di fisicamente reperire un riferimento assoluto. Negli anni successivi si scopre che la quasi totalità delle nebulose a spirale si muove rispetto alla nostra Galassia di moto recessivo; nel 1924 Hubble prova che esse sono esterne alla nostra Galassia, ossia costituiscono altrettante galassie; nel 1929 formula la sua celebre legge [11]: la velocità di fuga di una galassia è proporzionale alla sua distanza:

$$v = hr, \tag{1}$$

con h costante di proporzionalità (costante di Hubble). Una tale legge lasciava da un lato intuire che in un lontano passato le galassie fossero riunite in un unico ammasso; ma, d'altro lato, pareva porre in una posizione di privilegio di tipo tolemaico la nostra Galassia, quale centro dell'Universo.

Ma tale conclusione, ben difficilmente accettabile anche per il suo aspetto antropocentrico, è subito accantonabile osservando, ed è una constatazione che richiede soltanto considerazioni elementari, che una legge di espansione in cui la velocità di fuga sia proporzionale alla distanza implica che ogni galassia possa essere considerata come centro di espansione. Un'osservazione che è, d'altra parte, in pieno accordo con il cosiddetto principio cosmologico: l'Universo, ad un dato istante, presenta lo stesso aspetto da qualunque parte lo si osservi, principio su cui si fondano non solo i modelli cosmologici statici, ma anche i numerosi modelli cosmologici relativistici non statici, dei quali, per brevità e per rimanere nell'ambito della trattazione, mi limiterò a citare quelli sviluppati negli anni 1922-1924 da Friedmann [8], in cui non compare il termine correttivo introdotto da Einstein nel 1917, quello successivo di Lemaître [13], quello di Einstein-de Sitter del 1932 [7], ecc.

Un ritorno alla cosmologia newtoniana ha luogo negli anni trenta per opera di Milne e McCrea [15], [16]. Il punto di partenza è ancora il principio cosmologico, tramite il quale, ad opera di Milne, viene tra l'altro giustificata in modo elegante la legge di Hubble. Ma la loro teoria, proprio perché ancora una volta applicata ad un sistema continuo illimitato, non è esente da difficoltà del tipo di quelle incontrate da Seeliger. Va comunque sottolineato che i loro risultati permettono di porre in evidenza le analogie esistenti tra le soluzioni di tipo newtoniano (sia pure « adattate » con correzioni tipo quella proposta da Seeliger e Neumann: l'aggiunta alla forza gravitazionale di Newton di una forza repulsiva proporzionale alla distanza ed indipendente dalle proprietà fisiche della materia) e quelle fornite dai vari modelli relativistici. Le suddette difficoltà incontrate da Milne e McCrea possono inoltre essere aggirate con l'introduzione di una nuova definizione di sistema inerziale, più precisamente con l'introduzione di opportuni « sistemi inerziali locali » (ed è quanto è stato fatto da Heckmann e Schücking [9]), con conseguenze che a rigore non sono più ammissibili nel senso della meccanica newtoniana.

* * *

A due anni di distanza dalla formulazione della sua legge, Hubble aveva portato il raggio di validità di essa da 6 a 150 milioni di anni luce, per estenderlo qualche anno dopo, con la collaborazione di Humason, a 240 milioni. Con l'entrata in funzione negli anni cinquanta del telescopio di Monte Palomar, con la scoperta delle radiogalassie e con quella, degli anni sessanta, dei quasars, tale raggio è stato via via aumentato sino a raggiungere grandezze dell'ordine di vari miliardi di anni luce, in corrispondenza alle quali, sempre in base alla legge di Hubble, la grandezza della velocità di fuga risulta dell'ordine di quella della luce.

Tralascio di accennare a svariate altre teorie cosmologiche, quale quella di Zwicky [23] secondo la quale lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso nello spettro delle galassie non sarebbe imputabile ad un puro effetto Doppler ma ad un fenomeno di « invecchiamento » della luce, oppure quella di Lyttleton e Bondi [14], nella quale il fenomeno di espansione dell'Universo viene spiegato ammettendo che esista una differenza, sia pure eccezionalmente piccola (dell'ordine di 10^{-18} e quindi non rilevabile con misure di laboratorio), fra la grandezza della carica del protone e quella dell'elettrone. Tuttavia non si può passare sotto silenzio la celebre teoria dello stato stazionario che tanta risonanza ebbe negli anni cinquanta. Formulata da Bondi e Gold nel 1948 [1], perfezionata da Hoyle [10], essa si fonda sul seguente principio cosmologico: l'Universo presenta il medesimo aspetto *ad ogni istante* da qualunque parte lo si osservi. Poiché il fenomeno della fuga delle galassie non viene posto in discussione, perché l'Universo rimanga nel tempo inalterato, e quindi con densità immutata, è necessario che si formi in continuazione materia all'interno di esso. Con tale implicazione tale teoria ha sollevato grandi controversie e va detto, a suo discapito, che essa non è in grado di dare una valida spiegazione del perché l'Universo si espanda: essa è stata proposta senza una conveniente base matematica e fondata essenzialmente sul principio cosmologico perfetto o poco più. Semmai, per giustificare il fenomeno dell'espansione, occorrerebbe associare ad essa la già ricordata teoria « elettrica » di Lyttleton e Bondi, come in effetti è stato fatto da Bondi e Lyttleton stessi.

* * *

È, ormai, si può dire, universalmente accettato, soprattutto dopo la scoperta nel 1965 [19], [3] del fondo di radiazione cosmica previsto teoricamente vent'anni prima da Gamow (scoperta che ha portato, tra l'altro, al definitivo abbandono della teoria dello stato stazionario), l'assunto che, conformemente a quanto ipotizzato alcuni decenni or sono da Lemaître, Gamow ed altri, all'origine la materia si trovasse in una singolare situazione, che ricorda lo schema del punto materiale nella meccanica, secondo il quale il volume è nullo e la densità è infinita, e che una grande esplosione (il « big bang ») abbia dato origine al processo di espansione che dura tuttora.

* * *

Una volta accettato che all'origine vi sia stata la grande esplosione, si pone il problema di vedere se è possibile individuare in quale zona dell'Universo essa abbia avuto luogo; in altri termini, in quale zona sia situato il « centro dell'Universo », ammesso naturalmente che detto centro appartenga all'Universo stesso. Già si è visto, accennando alla legge di Hubble, come ciò possa sembrare irrealizzabile: non è comunque da escludere che

in futuro si possa giungere alla soluzione di questo problema, soprattutto quando (forse tra decenni, forse più) l'affinarsi delle tecniche sperimentali di indagine, associate forse a nuove scoperte in campo fisico ed astrofisico, saranno in grado di porre, tra l'altro, in evidenza, oltre che le velocità radiali, oggi poste in evidenza dall'effetto Doppler, anche eventuali velocità trasverse delle galassie (e con esse eventuali, forse improbabili ma non escludibili a priori, moti rotatori globali dell'intero Universo, ammessi in certi modelli cosmologici).

L'impossibilità di individuare il « centro dell'Universo » facendo ricorso unicamente alla legge di Hubble deriva, come si è ricordato, dal fatto che tale legge è di tipo lineare: al riguardo va detto che Allan Sandage, il naturale erede di Edwin Powell Hubble, spera di trovare una deviazione dalla legge lineare di Hubble per le grandi distanze. Una scoperta in questo senso apporterebbe senz'altro un notevole contributo alla soluzione del problema. E in proposito va ricordato che la costante di Hubble è molto malamente conosciuta e che risultati recenti di V. C. Rubin, W. K. Ford Jr. e J. S. Rubin (1973) [20] hanno fornito forse una prima prova derivante da osservazioni dirette dell'anisotropia della « costante » di Hubble, prova che pare sia stata confermata quest'anno da G. Le Denmat e J.-P. Vigier [12] attraverso l'analisi dei dati forniti dalle osservazioni delle supernovae nelle galassie lontane.

È il caso di osservare, sia pure per inciso, che l'eventuale scoperta del « centro dell'Universo » avrebbe notevoli implicazioni nell'ambito relativistico, soprattutto per quanto riguarda la struttura della varietà con cui viene rappresentato l'Universo nei vari modelli cosmologici relativistici.

* * *

La possibilità (sempre eventuale) di individuare il « centro dell'Universo » ripropone nuovamente, come risulta intuitivo tenendo conto del fenomeno del « big bang » ed invocando ragioni di simmetria, la possibilità di associare all'Universo un riferimento assoluto, fisicamente reperibile, che non risulterebbe altro che lo spazio assoluto della meccanica newtoniana.

È rispetto a tale riferimento che conviene, a differenza di quanto è stato fatto sino ad ora, sviluppare la cosmologia newtoniana, la quale non solo è più semplice da un punto di vista matematico, ma porta anche a risultati che, per certi aspetti, possono presentare analogie, come già si è accennato, con quelli ottenuti tramite modelli relativistici.

Associato al riferimento assoluto un tempo assoluto, è subito il caso di sgombrare il campo da ogni principio cosmologico (nella cui formulazione è implicita l'assunzione che l'Universo sia illimitato, con tutte le contraddizioni che, nell'ambito newtoniano, ne derivano; ed eliminando

così anche l'intervento dei sistemi inerziali locali introdotti da Heckmann e Schücking), convenendo invece di sostituire al sistema reale discontinuo degli oggetti celesti e materia interstellare un fluido materiale continuo (fluido cosmologico) ed isotropo [1]. Per semplicità (ed anche per brevità), ma soprattutto allo scopo di fornire una semplice idea di come sviluppare la trattazione, verrà trascurato ogni tipo di pressione.

Indicato con $\boldsymbol{r}$ il vettore che congiunge il centro O dell'Universo con il generico elemento di questo, dall'identità, conseguenza delle ammesse condizioni di simmetria e di isotropia,

$$\dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\dot{r}}{r}\,\boldsymbol{r}\,,$$

dovendosi, conformemente a quanto già osservato, ritenere vera la legge di Hubble per un'osservatore situato in O non appena la si ritenga vera per un osservatore solidale con la nostra Galassia, segue

$$\frac{\dot{r}}{r} = h\,, \tag{2}$$

ossia il rapporto $\dfrac{\dot{r}}{r}$ può essere funzione solo del tempo.

Da (2) si ha poi

$$\dot{h} = \frac{\ddot{r}}{r} - h^2\,, \tag{3}$$

ossia $\dfrac{\ddot{r}}{r}$ è funzione soltanto del tempo. Dall'equazione fondamentale della dinamica riferita all'unità di massa:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{g}\,,$$

segue pertanto subito

$$\boldsymbol{g} = \frac{\ddot{r}}{r}(t)\,\boldsymbol{r}\,,$$

relazione che, sostituita nell'equazione di Poisson

$$\operatorname{div}\boldsymbol{g} = -\,4\pi G\mu\,,$$

con G costante di gravitazione universale e μ densità, dà luogo a

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\,\frac{4}{3}\,\pi G\mu\,. \tag{4}$$

---

(1) Il caso più generale dell'anisotropia può essere pure affrontato, ma qui per semplicità e soprattutto per gli scopi a cui tende questa conferenza, viene tralasciato.

Risulta pertanto

$$g = -\frac{4}{3}\pi G\mu \boldsymbol{r},$$

ossia

(5) $$g = -G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r},$$

con evidente significato per la costante M, relazione che traduce un ben noto risultato della teoria del potenziale e che pone bene in evidenza come la legge di Hubble (qualora si intenda h unicamente come costante spaziale) sia perfettamente compatibile con la legge di gravitazione universale (e non sia quindi necessario, per giustificare detta legge, apportare, come è stato fatto da qualche autore, modifiche a quest'ultima, oppure fare ricorso ad un « universo elettrico », ecc.).

La relazione (4) esprime inoltre che la densità μ è funzione solo del tempo. Pertanto un'ammissione che nelle ordinarie teorie è inclusa nel principio cosmologico qui diventa una conseguenza della legge di Hubble.

Da quanto ora stabilito è possibile dedurre subito alcune interessanti conseguenze. Il ritenere h costante anche rispetto al tempo, come vien fatto in certi lavori di Milne e in vari altri, implica, per (3) e (4), e come d'altra parte è più che intuitivo, che risulti μ costante nel tempo: poiché l'Universo si espande, ciò porterebbe alla conclusione che all'interno di esso si creerebbe materia, ossia si ricadrebbe nella teoria dello stato stazionario.

Un'altra osservazione è che la « costante » di Hubble viene determinata sperimentalmente con riferimento a corpi celesti lontani milioni o addirittura miliardi di anni luce, con la conseguenza che per essa vengono dedotti valori relativi ad epoche anche assai lontane nel tempo. Il pretendere che essi siano gli stessi equivale a ritenere h costante nel tempo, con tutte le conseguenze contraddittorie che si sono viste giusto ora. Il supporre quindi h costante spaziale e confermare tale supposizione con le osservazioni, senza apportare opportune correzioni ai dati ottenuti, è sostanzialmente errato. La legge di Hubble, soprattutto dal punto di vista sperimentale, va pertanto ancora e a fondo studiata.

Altre deduzioni ed altre osservazioni si potrebbero trarre dalle poche premesse fatte, quali ad esempio quelle che si ottengono integrando le equazioni (3) e (4), alle quali va associata l'equazione di continuità. Si troverebbe nell'ambito newtoniano la legge secondo cui h varia col tempo, la legge secondo cui varia r, con indicazioni, sia pure sempre grossolane (stante anche la grande incertezza dei dati che l'astronomia di osservazione ci fornisce, quali il valore attuale della densità media della materia nell'Universo e quello attuale della costante di Hubble), sul modo con cui l'Universo

si evolve, in particolare se si espanderà indefinitamente oppure se da un certo istante in poi il fenomeno di espansione cesserà per dare inizio ad un processo di contrazione.

Soprattutto, dedotta la legge secondo cui varia h, la si potrebbe confrontare con i dati ottenuti tramite le osservazioni; oppure, viceversa, si potrebbe cercare di dedurre dai dati forniti dalle osservazioni — e che si riferiscono, ricordiamolo, ad epoche passate anche molto diverse — una legge empirica tramite la quale verificare fino a che punto è valida una teoria strettamente newtoniana.

Altre e rilevanti considerazioni ed osservazioni si imporrebbero poi, ma, per brevità, le tralascio.

Esprimo un ringraziamento al mio collaboratore Dr. Bruno Barberis per l'aiuto datomi nel preparare questa conferenza, raccogliendo la gran mole di materiale bibliografico che qui ho utilizzato solo in piccola parte, e che conto di utilizzare con lui nel prossimo futuro.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Bondi, T. Gold, Mon. Not. R.A.S., 1948, **108**, 252.
[2] P. L. de Chéseaux, *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743*, Appendice, Paris, 1944.
[3] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, D. T. Wilkinson, Ap. J., 1965, **142**, 414.
[4] W. de Sitter, Proc. Akad. Wetensch., 1917, **19**, 1217.
[5] W. de Sitter, Mon. Not. R.A.S., 1917, **78**, 3.
[6] A. Einstein, Sitzgsberg. Preuss. Akad. Wiss., 1917, 142.
[7] A. Einstein, W. de Sitter, Proc. Nat. Acad. Sc., 1932, **18**, 213.
[8] A. A. Friedmann, Zeits. f. Physik, 1922, **10**, 377; 1924, **21**, 326.
[9] O. Heckmann, E. Schücking, *Handbuch der Physik*, Ed. S. Flügge, Berlin, 1959, Band LIII, 495.
[10] F. Hoyle, Mon. Not. R.A.S., 1948, **108**, 372; 1949, **109**, 365.
[11] E. P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sc., 1929, 168.
[12] G. Le Denmat, J.-P. Vigier, C. R. Acad. Sc., 1975, **280**, 459.
[13] G. Lemaître, Ann. Soc. Sc. Bruxelles, 1927, **47A**, 49.
[14] R. A. Lyttleton, H. Bondi, Proc. R. Soc. A., 1959, **252**, 313.
[15] W. H. McCrea, E. A. Milne, Quart. J. Math., 1934, 73.
[16] E. A. Milne, Quart. J. Math., 1934, 64.
[17] C. Neumann, *Über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen*, Leipzig, 1896.
[18] H. W. M. Olbers, Edinburgh New Ph. J., 1826, 141.
[19] A. A. Penzias, R. W. Wilson, Ap. J., 1965, **142**, 419.
[20] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr., J. S. Rubin, Ap. J., 1973, **183**, L111.
[21] H. Seeliger, Astron. Nachr., 1895, **137**, 129.
[22] H. Seeliger, Münch. Ber. Math. Phys. Kl., 1896, 373.
[23] F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Sc., 1929, **75**, 773.

G. COLOMBO (*), D. LAUTMAN (**) and G. PETTENGILL (***)

An alternative option to the dual-probe out-of-ecliptic mission via Jupiter swing-by.

Summary. — *A combined interplanetary mission is suggested as a possible alternative of the dual probe out-of-ecliptic mission via Jupiter swing-by.*

It is proposed that one of the two probe exploits the Jupiter gravity assist technique for the injection of the probe, after the planet fly-by, in a rectilinear path falling into the Sun.

A survival of the probe as close as 4 radii to the Sun and possibly closer would allow unique particles and fields experiments and a determination of the quadrupole moment of the Sun with an accuracy of a few part in 10^8.

In the planned out-of-eccliptic mission two spacecrafts (*S/C*) of the Pioneer type are sent to Jupiter. Before encounter the two *S/C* separate and are injected, by middle course correction, in two paths having different impact parameters with the giant planet. The gravitational effect of Jupiter change drastically the orbits of the two *S/C*. After Jupiter encounter the two *S/C* move in two orbits close to the normal to the eccliptic in opposite direction (one going south, the other north).

With the idea of increasing the scientific output of the mission we have recently conducted a preliminary study on the possibility of combining the out-of-eccliptic (OOE) mission with a solar probe mission. In particular, we have been looking at the possibility of having a high-inclination OOE probe complemented by a second probe going from Jupiter to the sun along a rectilinear path (at least for the segment from 0.3 a.u. inward to the sun).

The scientific interest in approaching close to the sun is obvious since it enhances observation of particles, fields, and gravitational harmonics. Our particular choice of path results from the associated simplicity of the

(*) University of Padua and Center for Astrophysics (Harvard College Observatory and Smithsonian Astrophysical Observatory-Cambridge (Mass.).

(**) Center for Astrophysics (Harvard College Observatory and Smithsonian Astrophysical Observatory-Cambridge (Mass.).

(***) M.I.T. - Dept. of Earth and Planetary Sciences-Cambridge (Mass.).

spacecraft configuration needed to provide, for example, good thermal control, a drag-free system, and good communications with the earth.

A preliminary error analysis conducted by J. D. Anderson of the Jet Propulsion Laboratory leads to very interesting conclusions for an elliptical orbit with a perihelion distance of $16R_0$. Assuming that the nongravitational forces are compensated by a drag-free system (with three degrees of freedom) and that the spacecraft is tracked down to perihelion, the quadrupole moment of the sun can be determined with an accuracy of 3 parts in 10^7. Since the estimated value of J_2 ranges from 3×10^{-5} (applying Dicke's theory) to 1×10^{-7} (assuming rigid rotation of the interior with the observed surface), the interest in determining this moment with an accuracy of at least a few parts in 10^8 is clear. We remember that J_2 gives a fundamental constraint to the moment of inertia (or the ratio C/MR_0^2) and, therefore, on the internal density distribution of the sun.

As mentioned above, the result obtained by Anderson implies a three-axis drag-free system with an accuracy of 10^{-8} cm/sec^2. A drag-free system having this accuracy has recently been flown in the TRIAD satellite. If, however, we choose a solar-impact trajectory, then by using a spinning spacecraft, a one-axis drag-free system can be implemented that requires much less complexity. In fact, a spacecraft spinning about an axis aligned with the rectilinear path would allow (1) gyrostabilization (from 0.3 a.u. to the sun), (2) an easier design for thermal shielding, and (3) a one degree of freedom drag-free system. In particular, a sphere with an electrostatic suspension is free to move along the spin axis with no exchange of forces along the path. The displacement of the sphere along the spin axis will be sensed, causing the thruster (oriented along the spin axis) to compensate the nongravitational forces along the path to the desired accuracy. The spacecraft will be forced to follow the proof mass and, therefore, to follow a purely gravitational path. Transverse forces should be 4 orders of magnitude smaller and need not be compensated. The drag-free system can be calibrated when the probe is far from the sun (5 a.u.) in order to find the equilibrium position along the spin axis of the proof mass in the gravity field of the spacecraft.

During the 3.5 days that the spacecraft will spend in going from 0.25 a.u. to 0.01 a.u. and closer, the earth-sun-probe geometry will permit the earth to be in the beam of the 0.2-m-diameter antenna pointing parallel to the spacecraft spin axis. The Jupiter-swingby technique has enough flexibility to enable the mission to be timed so that the earth-spacecraft line remains within a few degrees of the direction of the spacecraft track. A 100-cm dish mounted on the spacecraft operating in the X band has a beamwidth of 8^2 and a gain of 27 db. By using a 64-m dish on the earth, this will allow a transmission data rate from 50 to 100 bits/sec, even with

the noise of the sun in the background. Doppler tracking using two frequencies in the X band (8 and 12 GHz) should yield a relative-velocity measurement accuracy of the order of 10^{-2} cm/sec (1 σ) with 60-sec integration time. The two-frequency radioscience experiment will allow the integrated electron content to be determined at each instant, and perhaps a weighted component of the integrated magnetic field (from Faraday rotation).

From Jupiter inward to 0.5 a.u., the spacecraft will operate in the Pioneer mode, performing selected experiments related to the solar stereoscopic and OOE missions.

From 0.5 a.u. inward, however, the mission will become more sun-oriented. The spacecraft spin axis will be directed sunward at this time, and the drag-free servo system will be activated. Some relevant probe parameters inside 0.5 a.u. are given in table I.

TABLE I. — *Probe parameters.*

Solar Distance		Time to $4R_0$ (days)	Velocity (km/sec)	Equilibrium Temperature (°K)
(a.u.)	(R_0)			
0.5	100	10.5	54	215
0.4	80	7.4	60	235
0.3	60	4.8	70	275
0.2	40	2.6	85	335
0.1	20	0.9	121	470
0.05	10	0.25	171	680
0.02	4	0	270	1060

The temperatures shown in the table are surface temperatures related to a properly designed reflective heat shield that covers the " front " side of the spacecraft; the internal temperatures of the spacecraft will not necessarily be so high. Furthermore, the last few solar radii are traversed in less than an hour, during which time, thermal equilibrium will not be established. It is entirely possible that the system will survive to $2\,R_0$. If it does, a straightforward calculation shows that tracking to a doppler accuracy of 10^{-2} cm/sec over the half-hour interval required for the spacecraft to fall from 3 to $2R_0$ would permit J_2 to be determined to an

accuracy of 10^{-8}. Since a realistic estimate of the magnitude of J_2 is about 10^{-7}, as is shown in the Appendix, an extremely valuable result would be guaranteed.

Obviously, many details of engineering design and scientific applicability remain to be worked out for this mission. But the preliminary effort so far expended appears more than sufficient to warrant this further pursuit.

APPENDIX

J_2 OF THE SUN.

The value of J_2 can be inferred for a rotating axially symmetric body by means of the first-order formula (Jeffreys, 1970)

$$\frac{3}{2} J_2 = f - \frac{1}{2} m \, , \tag{1}$$

where f is the flattening and $m = \omega^2 R_e/g_e$ is the ratio of centrifugal force at the equator to gravity at the equator. The assumptions made are that the gravitational potential is given by its first two terms only,

$$V_g = \frac{\mu}{r}\left[1 - J_2 \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 P_2(\sin\phi)\right], \tag{2}$$

and that the surface is rotating uniformly so that the centrifugal force can be derived from the potential

$$V_c = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2\phi \, . \tag{3}$$

Then the actual surface will be a level surface of the potential $V = V_g + V_c$.

If the surface is not rotating uniformly, we can modify equation (1) by assuming that, at any latitude, the surface will be perpendicular to the resultant of the gravity force given by the gradient of equation (2) and the centrifugal force equal to $\omega^2(\phi) r \cos\phi$ and directed away from the axis of rotation. Assuming that the shape of the surface is given by $r = R_E(1 - Y)$, we find, to first order,

$$\frac{dY}{d\phi} = \left(3J_2 + \frac{R_E^3\, \omega^2(\phi)}{\mu}\right) \sin\phi \cos\phi \, , \tag{4}$$

We assume that the angular velocity of the sun's surface can be approximated by $\omega(\phi) = \omega_0 - \omega_2 \sin^2\phi$ and obtain

$$\frac{3}{2} J_2 = f - \frac{1}{2} m_0 \left[1 - \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2\right], \tag{5}$$

where $m_0 = \omega_0^2 R_e/g_e$. For the sun, we have $m = 2.14 \times 10^{-5}$, $\omega_0 = 14.4^0/$

day, and $\omega_2 \simeq 4.5$ °/day, so the second term in equation (5) lies between 7.7×10^{-5} and 10.7×10^{-5}, depending on whether the differential rotation is included or not. The best determination of the flattening of the sun (Hill, 1974) is $f = (9.6 \pm 6.5) \times 10^{-6}$. It is clear that J_2 cannot be derived with any accuracy from equation (5), since it is the difference between two not very well-known quantities of nearly equal magnitude.

If the sun is rotating uniformly and if the density distribution is known, J_2 can be directly calculated. Following an analysis by Sterne (1939*a*), we define the "apsidal motion coefficient",

$$k = \frac{3 - n_s}{4 + 2n_s} ,$$

where n_s is the value at the surface of the variable n, which is zero at $r = 0$ and which satisfies Radeau's equation:

$$r \frac{d\eta}{dr} + \eta^2 - \eta - 6 + \frac{6\varrho}{\varrho_m} (\eta + 1) = 0 . \qquad (6)$$

In equation (6), ϱ is the density at r and ϱ_m is the mean density interior to r. Then,

$$J_2 = \frac{2}{3} km , \qquad (7)$$

where m has been previously defined. The coefficient k depends solcly on the distribution of mass within the star, ranging from zero for a completely concentrated star to 3/4 for a homogeneous star. Values of k have been calculated (Motz, 1952) for solar models by Schwarzschild (1946) and by Epstein (1951). Motz obtained $k = 0.00585$ and 0.00599, which leads to $J_2 = 8.3 \times 10^{-8}$ and 8.5×10^{-8}, respectively. Calculating J_2 for three later solar models, we found $J_2 = 1.56 \times 10^{-7}$ for a zero-age sun (Schwarzschild, 1958) and $J_2 = 1.41 \times 10^{-7}$ and 1.20×10^{-7} for two models of the present sun (Weymann, 1957, and Sears, 1964). Although we do not at present have dctailed calculations of later solar models, we note that a recent one (Hoyle, 1975), proposed to explain the low neutrino emission from the sun, has the unusually low central density of 75 g/cm^3. The ratio of central to mean density is then 53.2, which is quite close to 54.2, the ratio of central to mean density of the "standard model", a polytrope of index 3. Russell (1928) found $k = 0.0144$ for a polytrope of index 3, so we consider 2×10^{-7} to be a reasonable upper limit to the value of J_2 for a uniformly rotating sun.

It is of intcrcst to consider a lower bound to k and, hence, to J_2. The most concentrated star with a given central density is the generalized Roche modcl, which consists of a homogeneous core, with a density equal

to the central density containing all the star's mass, and an envelope with infinitesimal density. Radeau's equation can then be solved analytically (Sterne, 1939*b*) to obtain

$$J_2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\varrho_0}{\bar{\varrho}} \right)^{-5/3} \tag{8}$$

with current estimates of the central density of the sun ranging from about 75 to about 150 g/cm^3, we find the lower limit of J_2 to be between 1.4×10^{-8} and 4.5×10^{-9}.

REFERENCES

[1] Epstein I., 1951, Ap. J., **114**, 4380.

[2] Hill H. A., *et al.* 1974, Phys. Rev. Letters, **33**, 25, 1497.

[3] Hoyle F., 1975, Ap. J. (*Letters*), **197**, L127.

[4] Jeffreys H., 1970, *The Earth*, Fifth ed., Cambridge, p. 171.

[5] Motz L., 1952, Ap. J., **115**, 562.

[6] Russell H. N., 1928, M. N., **88**, 641.

[7] Schwarzschild M., 1946, Ap. J., **104**, 203.

[8] Schwarzschild M., 1958, *Structure and Evoluction of the Stars*, Princeton.

[9] Sears R. L., 1964, Ap. J., **140**, 477.

[10] Sterne T. E., 1939*a*, M. N., **99**, 451.

[11] Sterne T. E., 1939*b*, M. N., **99**, 670.

[12] Weymann R., 1957, Ap. J., **126**, 208.

C. TRUESDELL (*)

Macchine termiche irreversibili e la Seconda Legge della Termodinamica (**).

Abstract. — *The first part of the paper presents three estimates of efficiency which follow at once for homogeneous processes consistent with the First and Second Laws of Thermodynamics. The second part summarises work of Fosdick and Serrin on the thermodynamics of a deformable body in a heat bath. Use of a simple expression for the First Law combined with the Clausius-Duhem inequality delivers simple statements and rigorous proofs of four classical statements of impossibility.*

1. — Introduzione.

Nello sviluppo della termomeccanica razionale, che incominciò circa venti anni fa, si cercava per la maggior parte di completare la struttura della meccanica razionale. I primi cultori della materia desideravano collegare i cambiamenti specifici di forma con i cambiamenti specifici di temperatura. Il carattere delle equazioni costitutive forniva l'argomento principale delle ricerche. Si dimostrarono risultati locali, che si applicano alla spiegazione di fenomeni che fino allora non avevano fatto parte di alcuna teoria della meccanica dei continui.

Il successo rapido e abbondante delle prime ricerche si basava su un approccio alla termodinamica nel quale era presupposta una competenza nella meccanica dei continui. Si presumeva che il principiante avesse già appreso la meccanica razionale dal punto di vista attuale dei cultori di quel ramo, dopodiché sarebbe stato in grado di aggiungere variabili ed assiomi di carattere termodinamico. Senz'altro si sapeva che la materia dei libri di testo della termodinamica dei fisici era sepolta in qualche luogo della nuova struttura, ma l'approccio a tali testi, a parte la loro famigerata mancanza di chiarezza e i loro ragionamenti di carattere poco convincente

(*) Johns Hopkins University. Premio Panetti 1967.
(**) Lavoro eseguito con il contributo di un finanziamento della U. S. National Science Foundation alla Johns Hopkins University.

per lo studioso dotato di senso critico, non si prestava ad una descrizione esatta dei processi irreversibili. Intrapresi dunque a cercare un modo di insegnare la termodinamica classica che non obbligasse il principiante a disfarsi di tutto ciò che avesse già imparato, quando gli fosse venuto in mente di prendere sul serio i fenomeni irreversibili.

Nel corso di questo sforzo di pedagogia trovai quasi per caso che il rendimento delle macchine termiche, che aveva fornito la base del più antico approccio alla termodinamica, si prestava ad una stima ed in certi casi anche ad una determinazione più generali e più esplicite che non si erano mai sognate prima. Qualche anno fa ho esposto i miei risultati in parecchi istituti italiani.

Nella primavera scorsa Fosdick e Serrin scoprirono un'identità dalla quale i miei risultati principali derivano quasi automaticamente. Adoperando la loro identità, dimostrai varie diseguaglianze più precise e limitazioni ulteriori. Essi però sono riusciti ad estendere la loro identità in modo da fornire una struttura concettuale tramite la quale hanno potuto stabilire limitazioni per i rendimenti di corpi lavoranti eventualmente non omogenei. Hanno preso in considerazione un corpo continuo e deformabile in contatto con un bagno di calore di cui la temperatura possa variare col tempo secondo una legge qualsiasi. Finalmente, hanno adoperato la loro identità per dimostrare rigorosamente, anche se quasi automaticamente, le quattro più comuni impostazioni tradizionali della Seconda Legge come un'asserzione di impossibilità.

Scopo di questa conferenza è di esporre alcuni di questi risultati recenti.

2. — L'identità fondamentale per i processi omogenei.

Consideriamo funzioni definite su un intervallo $I = [t_1, t_2]$ del tempo t, e scriviamo

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}, \qquad \Delta f \equiv f(t_2) - f(t_1) . \tag{2.1}$$

Nel detto intervallo si associano ad un certo corpo le seguenti funzioni di t:

Q : quantità di calore nell'unità di tempo

E : energia interna

W : potenza netta, cioè la potenza delle forze che agiscono sul corpo meno la quantità di energia cinetica nell'unità di tempo.

Si definiscono come segue il *lavoro netto* U effettuato dal corpo nell'intervallo I, il *calore assorbito* C^+, e il *calore emesso* C^-:

$$U \equiv -\int_I W dt\,, \quad C^+ \equiv \int_{I^+} Q dt \geqq 0\,, \quad C^- \equiv -\int_{I^-} Q dt \geqq 0\,, \tag{2.2}$$

essendo I^+ e I^- i sottoinsiemi di I nei quali $Q > 0$ e $Q < 0$ rispettivamente. Se $Q = 0$ quasi sempre, il corpo subisce un *processo adiabatico*. Evidentemente si suppone che Q e W siano misurabili in I ed ivi integrabili secondo Lebesgue.

La prima legge della Termodinamica asserisce che

$$E = -U + C^+ - C^-. \tag{2.3}$$

Siano a e b costanti positive ed arbitrarie; sia θ una funzione misurabile e con estremo inferiore positivo; sia H una funzione arbitraria; allora la Prima Legge può scriversi come segue:

$$\begin{aligned} U = \left(1 - \frac{a}{b}\right)C^+ - (\Delta E - a\Delta H) - a\Bigg[\int_{I^+}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{b}\right)Qdt \\ + \int_{I^-}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\theta}\right)(-Q)dt + \Delta H - \int_I \frac{\Omega}{\theta}\, dt\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

È questa la *prima identità* di Fosdick e Serrin.

3. — Interpretazione.

Nell'applicare questa identità assumeremo sempre che la funzione θ sia la temperatura assoluta del corpo, e H l'entropia dello stesso. Assumiamo che θ abbia un estremo inferiore positivo $\theta_{\min}$ ed un estremo superiore finito $\theta_{\max}$. Secondo la diseguaglianza di Clausius-Planck, si ha per ogni processo

$$\Delta H \geqq \int_I \frac{Q}{\theta}\, dt\,. \tag{3.1}$$

Il processo si chiama *reversibile* se e solo se

$$\Delta H = \int_I \frac{Q}{\theta}\, dt\,. \tag{3.2}$$

Segue che il terzo integrale nella (2.4) è non-negativo e che è nullo se e solo se il processo è reversibile.

4. — Applicazioni.

Restano da scegliere le costanti a e b. Lo faremo in modo da dare agli altri due integrali un segno determinato.

1ª *Scelta.* Siano a e b le temperature minima e massima, rispettivamente $\theta_{\min}$ e $\theta_{\max}$. Segue che

$$U \leqq \left(1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}\right)C^+ - (\varDelta E - \theta_{\min}\varDelta H) \ ; \tag{4.1}$$

sussiste l'uguaglianza se e solo se il processo è reversibile ed anche (quasi sempre)

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_{\max} \quad \text{su} \quad I^+ \\ \theta &= \theta_{\min} \quad \text{su} \quad I^-. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tale processo si chiama un *processo di Carnot* reversibile.

2ª *Scelta.* Siano non vuoti gli insiemi I^+ e I^-, e siano

$$\theta^+ = \sup_{I^+} \theta \ , \qquad \theta^- = \inf_{I^-} \theta \ . \tag{4.3}$$

Scegliamo $a = \theta^-$, $b = \theta^+$. Segue che

$$U \leqq \left(1 - \frac{\theta^-}{\theta^+}\right)C^+ - (\varDelta E - \theta^-\varDelta H) \ . \tag{4.4}$$

Sussiste l'uguaglianza se e solo se il processo è reversibile ed anche (quasi sempre)

$$\theta = \theta^+ \quad \text{su} \quad I^+, \quad \theta = \theta^- \quad \text{su} \quad I^-.$$

Questa limitazione superiore è indipendente dalla precedente. Per rendere palese la differenza fra queste, consideriamo il cosiddetto «paradosso di Sommerfeld», che riguarda il comportamento «anomalo» dell'acqua a basse temperature. L'adiabatica che passa ad esempio per il punto p = pressione atmosferica, $\theta = 277\,^{\circ}$K deve esibire un minimo nel detto punto. Se facciamo un ciclo reversibile con questa adiabatica ed una qualsiasi isoterma che corrisponde ad una temperatura leggermente più alta di $277\,^{\circ}$K, non otteniamo un ciclo di Carnot, perché il corpo emette calore a temperature più alte della temperatura minima. Effettivamente $\theta^+ = \theta^-$. La seconda limitazione fa vedere che $U = 0$. Lungi dal produrre un rendimento superiore a quello classico, cioè $1 - \theta_{\min}/\theta_{\max}$, questo ciclo «anomalo» produce il rendimento nullo. Così si trova risolto il cosidetto paradosso.

3ª *Scelta.* Se scegliamo $a = \theta_{\max}$, $b = \theta_{\min}$, troviamo una limitazione inferiore per U:

$$U \geqq \left(1 - \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right)C^+ - (\varDelta E - \theta_{\max}\varDelta H) - \theta_{\max}\left(\varDelta H - \int_I \frac{Q}{\theta}\,dt\right) . \tag{4.5}$$

Sussiste l'uguaglianza se e solo se

$$\theta = \theta_{\min} \quad \text{su} \quad I^+, \quad \theta = \theta_{\max} \quad \text{su} \quad I^-.$$

Tale processo potrebbe chiamarsi «processo inverso di Carnot». In tale processo

$$-U \geqq \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} - 1\right)C^+ + (\Delta E - \theta_{\max}\Delta H)\,. \tag{4.6}$$

Sussiste l'uguaglianza se e solo se il processo è reversibile. Così troviamo limitazioni per l'efficienza dei refrigeratori.

5. — L'identità fondamentale per i corpi deformabili.

Passiamo ora alla meccanica dei corpi continui. Come nei paragrafi precedenti manteniamo il discorso al livello dei principi generali, senza far ricorso alle equazioni costitutive che definiscono i materiali particolari. Nella termomeccanica dei corpi deformabili la quantità Q di calore nell'unità di tempo ha una forma definita. Sia β_t la forma attuale del corpo supposto limitato, e sia $\partial\beta_t$ il contorno di essa. Si concepisce Q come il risultante della *conduzione* del calore attraverso la superficie $\partial\beta_t$ e della *radiazione* a cui è sottoposto il corpo stesso nella sua forma β_t. Cioè, se $\underset{\sim}{h}$ è il vettore flusso di calore all'unità di superficie e se r è la densità della sorgente di calore all'unità di massa, allora

$$Q = \int_{\partial\beta_t} \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n}\, dA + \int_{\beta_t} r\, dM\,, \tag{5.1}$$

ove il primo addendo è un integrale rispetto all'area della superficie $\partial\beta_t$, essendo $\underset{\sim}{n}$ il versore della normale esterna ad essa, ed il secondo addendo è un integrale rispetto alla massa.

Ora riguardiamo l'identità fondamentale (2.4). Per un corpo continuo e deformabile la temperatura è il valore di un campo scalare su β_t ad ogni istante t. Tale campo non può sostituirsi alla funzione θ del solo t nell'identità fondamentale. Invece di θ mettiamo però una qualsiasi funzione τ del solo t; su τ facciamo le stesse ipotesi che abbiamo fatto su θ nei §§ 2-3, e supponiamo che il campo θ^{-1} sia integrabile su β_t e sia superficialmente integrabile su $\partial\beta_t$; simultaneamente adoperiamo la forma definita (5.1) per il Q, e poi sommiamo e sottraiamo la quantità

$$a\left[\int_{\partial\beta_t} \frac{\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n}}{\theta}\, dA + \int_{\beta_t} \frac{r}{\theta}\, dM\right], \tag{5.2}$$

essendo θ ora il *campo delle temperature* su β_t. Così perveniamo alla *seconda identità* di Fosdick e Serrin:

$$U = \left(1 - \frac{a}{b}\right)C^+ - (\Delta E - a\Delta H) - a\left\{\int_{I^+}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{b}\right)Q\,dt\right.$$
$$+\int_{I^-}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\tau}\right)(-Q)dt + \int_I\left[-\int_{\partial\beta_t}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}\right)\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}\,dA\right. \qquad (5.3)$$
$$\left.\left.-\int_{\beta_t}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}\right)r\,dM\right]dt + \Delta H - \int_I\left(\int_{\partial\beta_t}\frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}}{\theta}\,dA - \int_{\beta_t}\frac{r}{\theta}\,dM\right)dt\right\}.$$

Sebbene sembri complicata di forma, questa identità esprime solo la Prima Legge per i corpi deformabili, né più né meno.

6. — Le diseguaglianze riguardo al trasferimento di calore.

Concepiamo un corpo che si trovi immerso in un bagno di calore, la temperatura del quale all'istante t è uniforme e ha il valore $\tau(t)$. Adottiamo riguardo a tale bagno l'assioma di tutti i primi ricercatori della termodinamica, assioma che il Maxwell espresse nelle parole seguenti: « il calore... non esce mai da un corpo se non per fluire dentro un corpo più freddo o mediante la conduzione o mediante la radiazione ». Questo assioma classico si esprime facilmente nei termini delle variabili che adoperiamo in questa indagine:

$$\begin{aligned}(\theta - \tau)\,\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n} &\leqq 0 \quad \text{su} \quad \partial\beta_t\,,\\ (\theta - \tau)\,r &\leqq 0 \quad \text{su} \quad \beta_t\,,\end{aligned} \qquad (6.1)$$

ove τ è la funzione il cui valore è la temperatura del bagno di calore, mentre θ è il campo delle temperature su β_t. Segue allora che

$$\int_I\left[-\int_{\partial\beta_t}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}\right)\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}\,dA - \int_{\beta_t}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}\right)r\,dM\right]dt \geqq 0\,. \qquad (6.2)$$

Sussiste l'uguaglianza se e solo se quasi sempre $\theta = \tau$ in quasi tutti i punti di $\partial\beta_t$ in cui $\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n} \neq 0$, ed anche quasi sempre $\theta = \tau$ in quasi tutti i punti di β_t in cui $r \neq 0$.

7. — Processi di Carnot per un corpo deformabile.

Nella termodinamica dei processi omogenei la temperatura del corpo si confonde colla temperatura del bagno di calore, tutte e due essendo funzioni del solo t. Se vogliamo estendere ai corpi continui e deformabili la diseguaglianza principale del § 4, cioè la (4.1), la scriviamo come segue,

$$U \leqq \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}\right)C^{+} - (\Delta E - \tau_{\min}\Delta H) \tag{7.1}$$

diseguaglianza che per i processi omogenei non sarebbe altro che quella già dimostrata.

Per analizzare la possibilità che sussista tale diseguaglianza, mettiamo nella (5.3) $a \equiv \tau_{\min}$ e $b \equiv \tau_{\max}$. Ne viene

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}\right)C^{+} - (\Delta E - \tau_{\min}\Delta H) - U = \\ &\tau_{\min}\left\{\int_{I^+}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{\max}}\right)Q\,dt + \int_{I^-}\left(\frac{1}{\tau_{\min}} - \frac{1}{\tau}\right)(-Q)dt\right. \\ &+ \int_I\left[\int_{\partial\beta_t}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau}\right)\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}\,dA + \int_{\beta_t}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau}\right)r\,dM\right]dt \\ &\left.+ \Delta H - \int_I\left(\int_{\partial\beta_t}\frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}}{\theta}\,dA - \int_{\beta_t}\frac{r}{\theta}\,dM\right)dt\right\}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

A secondo membro compaiono quattro addendi e gli integrali che compaiono nei primi tre sono non negativi. Diciamo che un processo è un *processo di Carnot* se minimizza la somma di questi tre integrali. Il valore minimo di ognuno di questi essendo nullo, in un processo di Carnot (per definizione)

$$\begin{aligned}&\tau = \tau_{\max} && \text{in } I^+ \text{ quasi sempre,}\\ &\tau = \tau_{\min} && \text{in } I^- \text{ quasi sempre,}\\ &(\theta - \tau)\,\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n} = 0 && \text{su } \partial\beta_t \text{ quasi ovunque,}\\ &(\theta - \tau)\,r = 0 && \text{su } \beta_t \text{ quasi ovunque.}\end{aligned} \tag{7.3}$$

Questa definizione corrisponde all'idea classica di tale processo. Sebbene il calore fluisca dentro il corpo in certi punti ed anche esca da certi altri punti, sia mediante la conduzione sia mediante la radiazione, il corpo intero assorbisce calore soltanto quando il bagno di calore ha la sua temperatura più alta, ed emette calore soltanto quando il bagno ha la sua temperatura più bassa. Altrimenti il corpo subisce un processo adiabatico. Per di più, il corpo si trova sempre in equilibrio termico col bagno di calore in tutti i suoi punti dove ha luogo o la conduzione o la radiazione del calore.

Segue che per un processo di Carnot

$$\Delta H - \int_I\left(\int_{\partial\beta_t}\frac{\underset{\sim}{h}\cdot\underset{\sim}{n}}{\theta}\,dA - \int_{\beta_t}\frac{r}{\theta}\,dM\right)dt = \Delta H - \int_I\frac{Q}{\tau}dt\,. \tag{7.4}$$

8. — Limitazioni per il rendimento di un corpo continuo e deformabile.

Avendo in mente la definizione di un processo di Carnot, dalla identità (7.2) segue immediatamente il

Teorema. — *Siano ammesse le diseguaglianze* (6.1) (di trasferimento del calore). *Per un corpo che subisce un processo di Carnot, affinchè sia*

$$U \leqq \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}\right) C^+ - (\Delta E - \tau_{\min}\Delta H) , \tag{8.1}$$

occorre e basta che

$$\Delta H \geqq \int_I \frac{Q}{\tau} dt . \tag{8.2}$$

Voi riconoscete questa diseguaglianza. Esprime uno degli asserti classici della « Seconda Legge della Termodinamica ». L'abbiamo ottenuta qui soltanto per i processi di Carnot, e quale condizione necessaria e sufficiente perché sia soddisfatta la limitazione generale del rendimento che abbiamo già stabilita per i processi omogenei, e cioè la (4.1).

9. — La diseguaglianza Clausius-Duhem.

Per molti studiosi della termodinamica dei continui la Seconda Legge si esprime esplicitamente nella diseguaglianza di Clausius-Duhem, cioè, *per ogni processo in ogni corpo*

$$\Delta H - \int_I \left(\int_{\partial\beta_t} \frac{\underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{n}}{\theta} dA - \int_{\beta_t} \frac{r}{\theta} dM \right) dt \geqq 0 . \tag{9.1}$$

Se ammettiamo questa diseguaglianza come assioma, ne deduciamo subito un teorema ben forte:

Teorema. — *Siano ammesse le diseguaglianze* (6.1) (di trasferimento del calore) *e* (9.1) (Clausius-Duhem). *Allora*

$$U \leqq \left(1 - \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}}\right) C^+ - (\Delta E - \tau_{\min}\Delta H) . \tag{9.2}$$

Sussiste l'uguaglianza se e solo se il processo sia un processo di Carnot nel quale

$$\tau \dot{H} = Q . \tag{9.3}$$

Non adopero di proposito la parola « reversibile ». Il concetto di reversibilità è poco adatto ai processi che può subire un corpo deformabile. Da qualsiasi definizione accettabile dei processi reversibili per un corpo

deformabile risulta una tale scarsità degli stessi da rendere quasi inapplicabile il concetto. Basta dire che per i corpi continui la limitazione classica (9.2) è ben debole, ben superiore al rendimento che si può raggiungere in qualsiasi processo non omogeneo.

10. — Dimostrazione rigorosa di vari enunciati classici della Seconda Legge.

Tutti conoscono i famosi ragionamenti verbali di carattere fisico oppure metafisico che sono stati sviluppati dai termodinamici del secolo scorso per giungere a varie impossibilità, che essi hanno voluto vedere come esprimenti la Seconda Legge. Ora siamo in grado di esprimere dette impossibilità in termini precisi e di dimostrarle facilmente, ma anche rigorosamente, purché sia ammessa come assioma la diseguaglianza di Clausius-Duhem.

Per tale scopo però bisogna ammettere anche la definizione classica di *processo chiuso* oppure un *ciclo*, e cioè

$$\Delta E = 0\,, \qquad \Delta H = 0\,, \tag{10.1}$$

definizione che può essere poco adatta alla descrizione di processi che occorrono nelle macchine reali. Considerato questo difetto della teoria matematica, preferisco enunciare i quattro teoremi in forme leggermente più generali, nella speranza che così possano risultare più utili per le eventuali applicazioni.

1° — Facendo ricorso alla (2.3), si scrive la diseguaglianza principale (9.2)

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} C^{+} \leqq C^{-} + \tau_{\min}\Delta H\,. \tag{10.2}$$

Siccome per definizione $C^{+} \geqq 0$, segue che

$$C^{-} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta H \leqq 0 \Longrightarrow C^{+} = 0\,. \tag{10.3}$$

Corollario. — *Un ciclo nel senso classico non può assorbire una quantità positiva di calore se non ne emette anche una quantità positiva.*

2° — Facendo ricorso di nuovo alla (2.3), scriviamo la diseguaglianza principale (9.2) sotto la forma

$$U \leqq \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} - 1\right) C^{-} - (\Delta E - \tau_{\max}\Delta H)\,. \tag{10.4}$$

Segue che

$$C^{-} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta E - \tau_{\max}\,\Delta H \geqq 0 \Longrightarrow U \leqq 0\,. \tag{10.5}$$

Corollario. — *Un ciclo nel senso classico che non emette una quantità positiva di calore non può rendere una quantità positiva di lavoro.*

3° — Supponiamo che esistano $k+1$ intervalli I_j tali che

$$I^+ \cup I^- = \bigcup_{j=0}^{k} I_j \; ; \tag{10.6}$$

supponiamo anche che sull'intervallo I_j la temperatura del bagno di calore sia la costante τ_j. Allora, se mettiamo $a = b = \tau_0$ nella seconda identità di Fosdick e Serrin (5.3), ne viene dopo l'applicazione delle diseguaglianze (6.2) e (9.1)

$$U \leqq -(\Delta E - \tau_0 \Delta H) - \tau_0 \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{\tau_0} \right) \int_{I_j} Q dt \, . \tag{10.7}$$

Finalmente supponiamo che su ciascuno degli intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_k$ il corpo emetta esattamente tanto calore quanto ne assorbe sul detto intervallo. Cioè,

$$\int_{I_j} Q dt = 0 \, , \qquad j = 1, 2, \ldots, k \, . \tag{10.8}$$

Allora, segue dalla (10.7) che

$$U \leqq -(\Delta E - \tau_0 \Delta H) \, . \tag{10.9}$$

Corollario (Kelvin). — *Consideriamo un corpo che subisca un ciclo che è adiabatico tranne che durante un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali la temperatura del bagno di calore è costante. Supponiamo inoltre che durante ogni intervallo salvo uno il corpo emetta tanto calore quanto ne assorbe. Tale corpo non può fornire lavoro positivo.*

4° — Tornando ancora alla seconda identità di Fosdick e Serrin (5.3), poniamo $a = b = \tau^*$. Ne viene

$$U \leqq -(\Delta E - \tau^* \Delta H) - \tau^* \left\{ \int_{I^+} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^*} \right) Q dt + \int_{I^-} \left(\frac{1}{\tau^*} - \frac{1}{\tau} \right) (-Q) dt \right\} . \tag{10.10}$$

Supponiamo allora che sia

$$\begin{aligned} \tau &\leqq \tau^* \quad \text{su} \quad I^+ \, , \\ \tau &\geqq \tau^* \quad \text{su} \quad I^- \, . \end{aligned} \tag{10.11}$$

Segue dalla (10.10) che

$$U \leqq -(\Delta E - \tau^* \Delta H) \, . \tag{10.12}$$

Corollario (Clausius). — *Un corpo che subisce un ciclo durante il quale assorbe calore solo a temperature non superiori alle temperature alle quali emette calore non può fornire lavoro positivo.*

11. — Conclusione.

Le quattro classiche impossibilità che sono state or ora espresse in termini precisi e dimostrate con strumenti matematici semplici e chiari sono ritenute spesso come enunciati della Seconda Legge. Sebbene gli autori affermino spesso l'equivalenza fra questi enunciati, i ragionamenti da essi seguiti non riescono sempre convincenti. D'altra parte i teoremi formali che abbiamo dimostrati qui sopra fanno apparire poco probabile un'equivalenza di tal genere.

Fra i cultori della termomeccanica dei continui la forma della « Seconda Legge » che trova la più larga accettazione è data dalla diseguaglianza di Clausius-Duhem. I teoremi da noi dimostrati fanno vedere che essa implica in modo semplice e rigoroso *la limitazione classica del rendimento ed anche tutte e quattro le classiche impossibilità*. Le magnifiche ricerche del Coleman, dieci anni or sono, hanno dimostrato che la detta diseguaglianza si applica ai materiali dotati di memoria e si presta alla dimostrazione di teoremi precisi e rigorosi che esprimono i classici enunciati riguardo alle proprietà di minimo di vari potenziali. L'impostazione precisa della Seconda Legge è a tutt'oggi oggetto di controversia. Non si può negare però che la diseguaglianza di Clausius-Duhem produca i risultati — tutti i vecchi asserti e molti nuovi teoremi — e li produca per di più in forme limpide e specifiche mediante l'uso di una matematica sempre impeccabile e spesso anche semplice, matematica del genere che adopera oggi ogni studente di liceo quando apprende la meccanica oppure l'elettromagnetismo.

È possibile che la diseguaglianza di Clausius-Duhem implichi qualcosa in più dell'ancora oggi sconosciuta Seconda Legge. Può infatti incorporare anche una specie di stabilità, una stabilità che per certe applicazioni può risultare troppo forte. Col tempo, quando la termomeccanica razionale sarà più largamente applicata e più profondamente indagata forse si avvertirà l'esigenza di sostituire alla diseguaglianza di Clausius-Duhem qualcosa di meno restrittivo. Nondimeno, dopo i successi spettacolari ottenuti grazie alle sue applicazioni, mi sembra poco probabile che essa venga mai messa da parte.

SILVIO NOCILLA (*)

Vibrazioni forzate a regime di sistemi non lineari con due gradi di libertà (**).

Summary. — *The steady state forced vibrations of non-linear systems with two degrees of freedom are studied with a suitable parametric procedure recently introduced by the A. and already applied to systems with one degree of freedom* [1], [2], [3], [4]. *The new methodology is applied in general to systems as* (1.1), *and in particular to a dynamical absorber with non linear internal force and with internal viscous damper. In this case analytical calculations are developed both in a first and a second approximation: the first one corresponds to a sinusoidal wave form, and leads to the solution of an algebric system; in the second one the wave form, not sinusoidal, depends on two wave-shape functions satisfying to a linear system of singular Volterra integral equations. Many numerical results are given, which allow also to discuss the presence of an infinite resonance, even in the presence of viscous damping.*

1. — Introduzione.

Lo studio delle vibrazioni meccaniche dei sistemi con due (e più) gradi di libertà, sulla cui importanza sia dal punto di vista teorico che applicativo appare superfluo qui insistere, presenta ancor oggi ampie e consistenti zone d'ombra, come si arguisce anche dal numero fortemente più limitato di ricerche, oggi a disposizione nella letteratura, rispetto ad esempio a quelle dedicate ai sistemi con un solo grado di libertà. Il fatto è che il passaggio da uno a due gradi di libertà non si presenta come una più o meno ovvia generalizzazione, ma riserva per lo più novità, e quindi difficoltà, non facilmente prevedibili. La presente ricerca è dedicata ad un aspetto particolare di tale studio, e cioè all'analisi delle vibrazioni forzate a regime, che costituisce un passo base su questa strada. Essa parte dal presupposto, indubbiamente semplificativo, che la soluzione cercata sia *periodica con lo stesso periodo della forzante*. È esclusa cioè dall'indagine la presenza di soluzioni subarmoniche o superarmoniche, che possono costituire oggetto di indagini collaterali.

(*) Politecnico di Torino.

(**) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

La ricerca si pone in una prospettiva ben delineata, che è quella della *costruzione effettiva della soluzione.* In tale prospettiva assumono particolare rilievo:

1) *la metodologia adottata,* consistente in un metodo parametrico di soluzione recentemente introdotto dall'Autore, e già applicato a sistemi con un grado di libertà [1, 2, 3, 4];

2) il particolare accento da porre su *proprietà strutturali* delle soluzioni (parità, disparità, simmetrie, forma d'onda);

3) *stabilità* nel senso che le soluzioni a regime ottenute si riscontrino effettivamente dopo un transitorio più o meno lungo. Per tale stabilità si pone il duplice problema di una adeguata impostazione e trattazione teorica, e di un controllo pratico mediante integrazione numerica delle equazioni del moto;

4) *applicazione a problemi concreti.*

Nella prospettiva sopra indicata verranno studiati sistemi del tipo:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} + F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = f(t) = f_0 \sin \nu t \\ \ddot{y} + E(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0 \end{cases}$$

dove F e E sono funzioni *dispari* dei loro argomenti, come sotto specificato:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} F(-\underline{X}) = -F(\underline{X}) \\ E(-\underline{X}) = -E(\underline{X}) \end{cases} \qquad \underline{X} = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$$

e dove f è una funzione *periodica dispari* con periodo $\mathcal{T} = 2\pi/\nu$, ossia:

$$(1.3)\qquad f(t + \mathcal{T}/2) = -f(t)$$

Cercheremo qui soluzioni $x(t)$ ed $y(t)$ anch'esse periodiche dispari con egual periodo $\mathcal{T}$ della forzante, soddisfacenti cioè alla stessa condizione funzionale (1.3), in cui naturalmente si sostituisca la $f(t)$ rispettivamente con la $x(t)$ e la $y(t)$.

Ricordiamo che il corrispondente sistema con un grado di libertà:

$$(1.4)\qquad \ddot{x} + F(x, \dot{y}) = f(t)$$

fu già preso in considerazione in [1], [2] e [3], e studiato più in dettaglio nei casi particolari dell'equazione di Duffing con dissipazione viscosa:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k'x^3 = f_0 \sin \nu t$$

e dell'equazione [4]:

$$\ddot{x} + c(x)\dot{x}\,|\,\dot{x}\,|^{n-1} + k(x) = 0$$

con n reale positivo, $c(x)$ funzione pari di x, e $k(x)$ funzione dispari di x, che generalizza le ben note equazioni di Van der Pol, Liénard e Liénard generalizzata.

2. — METODO PARAMETRICO DI SOLUZIONE.

Esso consiste nel cercare la soluzione sotto la forma seguente:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} x = x^* \sin \tau \\ \nu t = \tau + \vartheta + \phi(\tau) \end{cases} \qquad \text{con } \phi(\tau) = \int_{-\pi/2}^{\tau} \varphi(s) ds$$

$$(2.2) \qquad \begin{cases} y = y^* \sin \sigma \\ \sigma = \tau + \alpha + \Psi(\tau) \end{cases} \qquad \text{con } \Psi(\tau) = \int_{-\pi/2}^{\tau} \psi(s) ds$$

dove $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ costituiscono le due nuove funzioni incognite nella variabile indipendente τ in luogo di $x(t)$ ed $y(t)$, ed hanno il significato di « funzioni di forma » delle due onde a regime cercate.

Estendendo al caso presente quanto dimostrato in [1] per il caso con un grado di libertà noi cercheremo due funzioni $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ soddisfacenti alle condizioni seguenti, che per brevità scriviamo soltanto per la $\varphi(\tau)$, ma che valgono anche per la $\psi(\tau)$:

$$(2.3) \qquad \varphi(\tau) > -1$$

che assicura la *regolarità* della $\dot{x}$;

$$(2.4) \qquad \varphi(\tau + \pi) = \varphi(\tau) \qquad \textit{periodo } \pi \textit{ in } \tau$$

$$(2.5) \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\tau) d\tau = 0 \qquad \textit{valor medio nullo}$$

che assicurano la *periodicità dispari* della $x(t)$
ed infine:

$$(2.6) \qquad (\Delta \ddot{x})_{\dot{x}=0} = \nu^2 x^* \left\{ \frac{1}{[1 + \varphi(-\pi/2)]^2} - \frac{1}{[1 + \varphi(\pi/2)]^2} \right\}$$

che tiene conto della *eventuale discontinuità* della $\ddot{x}$ per $\dot{x} = 0$. Nel caso di *assenza di discontinuità* per $\dot{x} = 0$ dovrà dunque essere:

$$(2.7) \qquad \varphi(-\pi/2) = \varphi(\pi/2)$$

Come intervallo fondamentale per la variabile indipendente τ assumeremo l'intervallo $-\pi/2 \vdash\!\!\dashv \pi/2$.

Dalle (2.1) e (2.2) si ricava:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\nu x^* \cos \tau}{1 + \varphi(\tau)} \\[2ex] \ddot{x} = \dfrac{\nu^2 x^*}{1 + \varphi(\tau)} \dfrac{d}{d\tau} \left[\dfrac{\cos \tau}{1 + \varphi(\tau)} \right] \end{cases}$$

$$
(2.9) \qquad \begin{cases} \dot{y} = \nu y^* \dfrac{\cos\sigma[1+\psi(\tau)]}{1+\varphi(\tau)} \\ \ddot{y} = \dfrac{\nu^2 y^*}{1+\varphi(\tau)} \dfrac{d}{d\tau}\left[\dfrac{\cos\sigma\,[1+\Psi(\tau)]}{1+\varphi(\tau)}\right] \end{cases}
$$

cosicché le (1.1) si possono scrivere, dopo un'integrazione tra $-\pi/2$ e τ:

$$
\begin{cases} (2.10) \quad \nu^2 x^* \dfrac{\cos\tau}{1+\varphi(\tau)} + \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} F(x,\dot{x},y,\dot{y})_{\tau=s}[1+\varphi(s)]\,ds = J \\ (2.11) \quad \nu^2 y^* \left[\cos\sigma \dfrac{1+\psi(\tau)}{1+\varphi(\tau)} - C\right] + \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} G(x,\dot{x},y,\dot{y})_{\tau=s}[1+\varphi(s)]\,ds = 0 \end{cases}
$$

dove si è introdotta la costante:

$$
(2.12) \qquad C = \sin\alpha \frac{1+\psi(-\pi/2)}{1+\varphi(-\pi/2)}
$$

e dove il secondo membro della (2.10) vale:

$$
(2.13) \qquad J = \int_{-\pi/2}^{\tau} f[s+\vartheta+\phi(s)]\,[1+\varphi(s)]\,ds = \int_{-\pi/2}^{\tau+\Phi(\tau)} f(\vartheta+s)\,ds
$$

Nel caso particolare di una forzante sinusoidale $f(t) = f_0 \sin \nu t$ risulta:

$$
(2.14) \quad J = f_0\left[\sin\vartheta - \cos(\tau+\vartheta) + 2\sin\left(\frac{\phi(\tau)}{2}\right)\sin\left(\tau+\vartheta+\frac{\phi(\tau)}{2}\right)\right]
$$

Le equazioni (2.10) e (2.11) costituiscono un sistema di due equazioni integrali non lineari nelle funzioni incognite $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$. Per esplicitarle completamente è necessario conoscere in forma esplicita le funzioni F, E ed f, e sostituire al posto di $x, \dot{x}, y, \dot{y}$, le loro espressioni quali compaiono nelle (2.8) e (2.9), ponendo s in luogo di τ. Tali equazioni integrali contengono anche le *quattro costanti incognite* $x^*, y^*, \vartheta, \alpha$ introdotte nelle espressioni parametriche (2.1) e (2.2). Lo studio di tali equazioni integrali potrà essere effettuato, in ordine di difficoltà crescenti, seguendo lo schema seguente:

I) Una *prima approssimazione* si ottiene con:

$$
(2.15) \qquad \varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0
$$

È importante osservare che tale approssimazione è in genere tutt'altro che banale, e corrisponde all'ipotesi spesso fatta nella letteratura della *forma d'onda sinusoidale*. In tal caso le costanti ϑ e α hanno significato di vere e proprie costanti di fase. In tale approssimazione il problema consiste nello studio delle curve di risposta in ampiezza x^* e y^* e fase ϑ

e α al variare della pulsazione ν e dell'ampiezza f_0 della forzante, nonché di altri parametri che intervengono nel particolare problema studiato.

II) Una *seconda approssimazione* consiste nel considerare *forme d'onda non troppo lontane da quella sinusoidale*, e quindi le funzioni $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ piccole rispetto all'unità:

$$\varphi(\tau) \ll 1 \ ; \quad \psi(\tau) \ll 1 \tag{2.16}$$

Il sistema di equazioni integrali (2.10) e (2.11) viene allora linearizzato rispetto a $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ e si riduce ad un sistema di equazioni integrali lineari di Volterra (di prima specie). Il pregio di questa seconda approssimazione non è solo quello di migliorare la prima approssimazione, ma anche e soprattutto quello di indicare come si modifica la forma d'onda delle soluzioni a regime rispetto a quella sinusoidale. In tale seconda approssimazione, così come nella soluzione esatta del problema, le costanti x^* e y^* possono ancora essere considerate come « ampiezze » di vibrazione, perché rappresentano i *massimi* degli spostamenti $x(t)$ e $y(t)$; le costanti ϑ e α invece non possono più riguardarsi come costanti di fase, essendo questo concetto strettamente legato alle oscillazioni sinusoidali. Tuttavia anche queste due costanti costituiscono delle incognite base del problema: le chiameremo *pseudo-fasi*.

In entrambe le suddette approssimazioni sarà molto importante stabilire quali sono i loro limiti di validità in realzione ai vari parametri noti del problema.

III) Per una *soluzione esatta* del problema, che si presenta ovviamente estremamente difficoltosa, si può pensare alla ricerca di sviluppi in serie di Fourier delle funzioni incognite. Tali serie, a causa delle condizioni (2.4) e (2.5), saranno del tipo:

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin 2n\tau + B_n \cos 2n\tau) \tag{2.17}$$

$$\psi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin 2n\tau + D_n \cos 2n\tau) \tag{2.18}$$

Un procedimento alternativo, che qui proponiamo senza svilupparlo, consiste in un opportuno metodo iterativo di soluzione che si avvale come punto di partenza delle soluzioni approssimate di cui in I) o in II).

3. — Applicazione allo studio di un ammortizzatore dinamico di vibrazioni.

La teoria impostata nei numeri precedenti verrà ora applicata e sviluppata nel caso dell'ammortizzatore dinamico di vibrazioni schematizzato

in fig. 1. Tale ammortizzatore, fu oggetto di studio da parte di Pipes [5] nel caso di assenza di dissipazione, dando luogo a vivaci discussioni [6] sulla possibilità o meno di eliminare i picchi di risonanza infiniti in

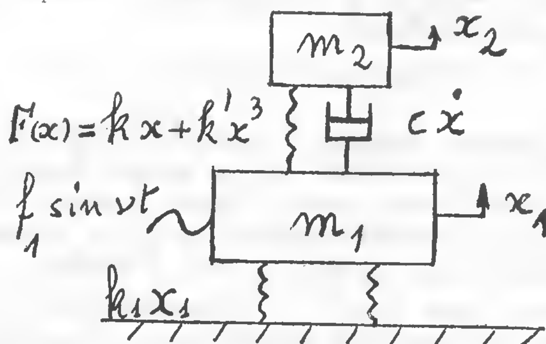


Fig. 1 – Ammortizzatore dinamico a due gradi di libertà, con forza non lineare interna e smorzatore viscoso interno.

corrispondenza di particolari frequenze forzanti. La questione presenta notevole interesse tecnico, ed è ancor oggi dibattuta. Essa troverà risposta già nella prima approssimazione che studieremo nel n. 4; tale risposta verrà confermata dai risultati ottenuti da R. Riganti con integrazione numerica di cui faremo cenno nel n. 8.

Gli ammortizzatori dinamici furono anche oggetto di studi recenti di Massa e Ruggeri [9], [10], [11], includenti l'esame della stabilità delle soluzioni e relativo controllo col calcolatore analogico, nonchè la discussione sulle possibilità d'impiego pratico. Anche in tali lavori però il problema delle forme d'onda non viene considerato, essendo la vibrazione assunta sinusoidale. Inoltre la rigidezza variabile della molla viene approssimata nei calcoli con una opportuna « rigidezza equivalente » costante per ogni vibrazione, in modo che le equazioni del moto diventano lineari.

Le equazioni del moto del sistema sono:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} [F(x) + c\dot{x}] \dfrac{k_1}{m_1} (x + y) = \dfrac{f_1}{m_1} \sin(\nu t) \\ \ddot{y} - \dfrac{F(x) + c\dot{x}}{m_2} = 0 \end{cases}$$

dove:

$$(3.2) \qquad F(x) = kx + k'x^3$$

rappresenta la forza elastica non lineare agente tra le due masse, dipendente dal loro *spostamento relativo*:

$$x = x_1 - x_2 \tag{3.3}$$

$y = x_2$ è lo spostamento della massa m_2, mentre gli altri simboli hanno significato evidente.

Nel problema intervengono i seguenti parametri:

a) *parametri noti dimensionati*

$$\begin{cases} m_1, m_2 = \text{masse} \\ \nu \;\; = \text{pulsazione forzante} \\ \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1} \\ \omega \;\; = \sqrt{k/m_2} \\ c_{cr} = 2\sqrt{m_2 k} = \text{coefficiente critico di smorzamento} \\ b \;\; = \dfrac{k'}{k} \begin{cases} > 0 & \text{se } k' > 0 \\ < 0 & \text{se } k' < 0 \end{cases} ; \; a = f_1\, \mu/k \end{cases} \tag{3.4}$$

b) *parametri noti, numeri puri*

$$\begin{cases} \xi = \nu^2/\omega^2 \\ \varepsilon = \omega_1^2/\omega^2 \\ \gamma = 2c/c_{cr} = c/\sqrt{m_2 k} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu \;\; = m_2/m_1 \\ \mu' = 1 + \mu \\ \overline{f}_1 = \left(f_1 \dfrac{m_2}{m_1}\right)^2 \dfrac{k'}{k^3} \end{cases} \tag{3.5}$$

Dunque in tutto *cinque* parametri indipendenti: ξ, ε, γ, μ, $\overline{f}_1$

c) *parametri incogniti, numeri puri*

$$\begin{cases} \eta^* = b x^{*2} \begin{cases} > 0 & \text{se } k' > 0 \\ < 0 & \text{se } k' < 0 \end{cases} \\ \text{oppure } \; \lambda^* = \sqrt{\overline{f}_1/\eta^*} = a/x^* = f_1 \mu/(k \, . \, x^*) \\ \varrho^* = y^*/x^* \qquad (x^*, \, y^* > 0) \\ \vartheta \text{ e } \alpha \text{ pseudo-fasi} \end{cases} \tag{3.6}$$

Dunque in tutto quattro parametri incogniti: η^*, ϱ^*, ϑ, α.

Il caso limite della sola equazione di Duffing nella x, studiato in [1], [2], si ottiene per $m_2 \to \infty$, e quindi μ e $\mu' \to \infty$ anch'essi, e $\omega \to 0$; e inoltre $k_1 \to 0$ e $\omega_1 \to 0$. In tal caso il rapporto $\overline{f}_1/\mu'^2$ tende al valore $f_1^2 \, . \, k'/k^3$, ed il rapporto ξ/μ' tende al valore $\nu^2 m_1/k$. A proposito di tale equazione, senza dissipazione viscosa, ricordiamo anche il recente lavoro [7] in cui si dà particolare accento alla forma dell'onda.

Effettuando nelle equazioni del moto (3.1) le sostituzioni (2.1) e (2.2) si ottiene, dopo alcune manipolazioni e tenendo anche conto delle (2.13) e (2.14), il seguente sistema di equazioni integrali non lineari nelle funzioni incognite $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$

$$\begin{cases} \xi \cos \tau \dfrac{\varphi(\tau)}{1+\varphi(\tau)} = g(\tau) + \mathcal{A}(\varphi, \tau) + \mathcal{B}(\varphi, \psi, \tau) - \mathcal{F}(\varphi, \tau) & (3.7) \\ \xi\varrho^* \cos [\tau + \alpha + \Psi(\tau)] \dfrac{\psi(\tau) - \varphi(\tau)}{1+\varphi(\tau)} = h(\tau) + \mathcal{A}_0(\varphi, \tau) + \mathcal{C}(\psi,\tau) & (3.8) \end{cases}$$

dove sono state introdotte le seguenti funzioni note:

$$(3.9) \quad \begin{cases} g(\tau) = g_0 \cos \tau + g_1(1 + \sin \tau) + \dfrac{1}{12} \mu'\eta^* \cos 3\tau \\ h(\tau) = h_0 \cos \tau + h_1(1 + \sin \tau) + \dfrac{1}{12} \eta^* \cos 3\tau + \xi\varrho^* \sin \alpha\tilde{C} \end{cases}$$

con:

$$(3.10) \quad \begin{cases} g_0 = \xi - (\mu' + \varepsilon) - \dfrac{3}{4} \mu'\eta^* - \varepsilon\varrho^* \cos \alpha + \lambda^* \cos \vartheta \\ g_1 = \gamma\mu'\sqrt{\xi} + \varepsilon\varrho^* \sin \alpha - \lambda^* \sin \vartheta \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} h_0 = -\left(1 + \dfrac{3}{4}\eta^* + \xi\varrho^* \cos \alpha\right) \\ h_1 = \gamma\sqrt{\xi} + \xi\varrho^* \sin \alpha \end{cases} \qquad (\lambda^* = \sqrt{f_1/\eta^*})$$

$$(3.12) \quad \tilde{C} = \frac{\psi(-\pi/2) - \varphi(-\pi/2)}{1 + \varphi(-\pi/2)}$$

ed i seguenti operatori integrali:

$$(3.13) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(\varphi, \tau) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} [(\mu' + \varepsilon) \sin s + \mu'\eta^* \sin^3 s]\varphi(s)ds \\ \mathcal{A}_0(\varphi, \tau) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} (\sin s + \eta^* \sin^3 s)\varphi(s)ds \\ \mathcal{B}(\varphi, \psi, \tau) = \varepsilon\varrho^* \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} \sin [s + \alpha + \psi(s)]\varphi(s)ds + \\ \qquad + \varepsilon\varrho^* \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\tau} 2 \sin [\psi(s)/2] \cos [s + \alpha + \psi(s)/2]ds \\ \mathcal{C}(\varphi, \tau) = -2\xi\varrho^* \sin [\psi(\tau)/2] \sin [\tau + \alpha + \psi(\tau)/2] \\ \mathcal{F}(\varphi, \tau) = 2\lambda^* \sin [\phi(\tau)/2] \sin [\tau + \vartheta + \phi(\tau)/2] \end{cases}$$

È importante osservare che tutti gli operatori suddetti si annullano per $\varphi = 0$ e $\psi = 0$, ossia:

$$\mathcal{A}(0, \tau) = 0\,, \quad \mathcal{B}(0, 0, \tau) = 0\,, \quad \text{etc.} \tag{3.14}$$

Osserviamo inoltre che il sistema formato dalle (3.10) e (3.11) può essere riguardato come un sistema algebrico di quattro equazioni nelle quattro incognite η^*, ϱ^*, ϑ, α. Da tale sistema non è difficile eliminare ϱ^*, ϑ, α ottenendo così anzitutto la seguente *cubica fondamentale* in η^*:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\varepsilon - \xi + (\mu' - \varepsilon/\xi)\left(1 + \frac{3}{4}\eta^*\right) + g_0 - h_0\varepsilon/\xi\right]^2 + \\ &\quad + \left[\gamma\sqrt{\xi}\,(\mu' - \varepsilon/\xi) - g_1 + h_1\varepsilon/\xi\right]^2 = f_1/\eta^*\end{aligned}} \tag{3.15}$$

che costituisce la chiave di tutto il problema, e che scriveremo sinteticamente come segue:

$$P_3(\eta^*;\, \underline{G}) = 0 \tag{3.16}$$

per mettere in evidenza la dipendenza dal vettore:

$$\underline{G} = (g_0, g_1, h_0, h_1) \tag{3.17}$$

Risolvendo poi rispetto alle tre restanti incognite abbiamo:

$$\varrho^* = \frac{1}{\xi}\sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\eta^* + h_0\right)^2 + (h_1 - \gamma\sqrt{\xi})^2} \tag{3.18}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\gamma\sqrt{\xi}\,(\mu' - \varepsilon/\xi) - g_1 + h_1\varepsilon/\xi}{\varepsilon - \xi + (\mu' - \varepsilon/\xi)\left(1 + \frac{3}{4}\eta^*\right) + g_0 - h_0\varepsilon/\xi} \tag{3.19}$$

$$\sin \gtrless 0 \quad \text{per} \quad \gamma\sqrt{\xi}(\mu' - \varepsilon/\xi) - g_1 + h_1\varepsilon/\xi \gtrless 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\gamma\sqrt{\xi} - h_1}{1 + \frac{3}{4}\eta^* + h_0}\,; \quad \sin\alpha \gtrless 0 \quad \text{per} \quad h_1 \gtrless \gamma\sqrt{\xi} \tag{3.20}$$

che scriveremo sinteticamente nel modo seguente:

$$(\varrho^*, \vartheta, \alpha) = \Omega(\eta^*, \underline{G}) \tag{3.21}$$

4. — Studio di una prima approssimazione.

D'accordo con quanto detto nel n. 2 studiamo anzitutto la prima approssimazione che si ottiene ponendo $\varphi(\tau) = 0$ e $\psi(\tau) = 0$ nelle equazioni integrali (3.8). Data la proprietà (3.14) degli operatori (3.13) si riconosce immediatamente che ciò porterebbe alle condizioni:

$$g(\tau) = 0 \quad \text{e} \quad h(\tau) = 0 \tag{4.1}$$

che dovrebbero valere identicamente rispetto a τ. Date le espressioni (3.9) di $g(\tau)$ e $h(\tau)$ è chiaro che le (4.1) non possono essere soddisfatte rigorosamente. Ciò prova che in generale le forme d'onda delle soluzioni a regime cercate non possono essere sinusoidali rigorosamente. Possiamo però soddisfare in prima approssimazione le (4.1) imponendo le quattro condizioni seguenti:

$$\begin{cases} g_0 = 0 \\ g_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_0 = 0 \\ h_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \quad \underline{G} = 0 \tag{4.2}$$

Così facendo vengono ad essere *non bilanciati*, o trascurati i seguenti *resti* (la $\tilde{C}$ risulta nulla se $\varphi = \psi = 0$):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{12}\,\mu'\,\dfrac{\eta^*}{\xi}\cos 3\tau & \text{nella prima equazione} \\[2ex] \dfrac{1}{12}\,\dfrac{\eta^*}{\xi\varrho^*}\cos 3\tau & \text{nella seconda equazione} \end{cases} \tag{4.3}$$

Tali resti sono le armoniche 3τ delle funzioni note $g(\tau)$ e $h(\tau)$ divisi per ξ e $\xi\varrho^*$. Infatti agli effetti del computo di tali resti le equazioni integrali (3.7) e (3.8) devono intendersi divise per ξ e per $\xi\varrho^*$ rispettivamente.

La impostazione che ora abbiamo dato alla presente prima approssimazione permette di valutare anche i *limiti di validità* dell'approssimazione stessa. Infatti le espressioni (4.3) dei resti mostrano senz'altro che, per lo meno se ϱ^* non è piccolo, questa approssimazione

— è *rigorosa* al limite per $\xi \to \infty$ ed η^* limitato;
— è *buona* per $\xi \to \infty$, $\eta^* \to \infty$ con η^*/ξ limitato;
— è *cattiva* per ξ piccoli ed η^* grandi.

In tale approssimazione si hanno dunque le seguenti forme d'onda sinusoidali:

$$\begin{cases} x = x^* \sin(\nu t - \vartheta) \\ y = y^* \sin(\nu t - \vartheta + \alpha) \end{cases} \tag{4.4}$$

da cui si ricava la seguente espressione, anch'essa con forma d'onda sinusoidale, dello spostamento della massa m_1:

(4.5) $$x_1 = x + y = x_1^* \sin(\nu t - \vartheta + \beta)$$

con:

(4.6) $$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + 2x^*y^* \cos\alpha} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{y^* \sin\alpha}{x^* + y^* \cos\alpha} ; \quad \sin\beta < 0 \end{cases}$$

Imponendo le condizioni (4.2) si ottengono i risultati seguenti:

A) *senza dissipazione viscosa*: $\gamma = 0$

Le (3.19) e (3.10) si soddisfano con:

(4.7) $$\begin{cases} \sin\vartheta = 0 \text{ e quindi } \vartheta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \sin\alpha = 0 \text{ e quindi } \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \end{cases}$$

Introducendo come d'uso le *ampiezze algebriche* così definite:

(4.8) $$\begin{cases} x^{**} = \pm x^* \quad \text{per} \quad \vartheta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \qquad \lambda^{**} = a/x^{**} \\ y^{**} = \pm y^* \quad \text{per} \quad \vartheta - \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \\ \varrho^{**} = \pm \varrho^* \quad \text{per} \quad \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \end{cases}$$

da cui in particolare:

(4.9) $$y^{**} = x^{**}\varrho^{**} \quad \text{e inoltre} \quad \eta^* = bx^{**2}$$

le (4.4) e (4.5) si scrivono:

(4.10) $$\begin{cases} x = x^{**} \sin(\nu t) \\ y = y^{**} \sin(\nu t) \end{cases}$$

La cubica fondamentale (3.15) e la (3.18) si possono scrivere nel modo seguente:

(4.11) $$\xi^2 - \left[\varepsilon + \mu'\left(1 + \frac{3}{4}bx^{**2}\right) - \sqrt{f_1/b}\,/x^{**}\right]\xi + \varepsilon\left(1 + \frac{3}{4}bx^{**2}\right) = 0$$

(4.12) $$\varrho^{**} = -\frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{3}{4}bx^{**2}\right)$$

Una volta determinati x^{**} e ϱ^{**} si ha subito lo spostamento $x_1(t)$ della massa m_1 sotto la forma seguente:

$$(4.13)\quad x_1 = x_1^{**} \sin(\nu t) \quad \text{con } x_1^{**} = x^{**}\left[1 - \frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{3}{4}\,b x^{**2}\right)\right]$$

È importante osservare che la (4.11) si presenta come equazione di secondo grado in ξ, il che permette di ricavare in forma esplicita la ξ in funzione di x^{**}. Sfruttando questo fatto si riesce a discutere l'andamento generale delle curve di risposta in ampiezza x^{**}, in funzione del parametro ξ, ossia in sostanza [v. (3.5)] della pulsazione ν della forzante. Il risultato che si ottiene è il seguente, quale appare dal diagramma di fig. 2*b* relativo al caso $\mu' = 2$, $\varepsilon = 5$, $\bar{f}_1 = 4$ (cui corrisponde un $k' > 0$). Il diagramma (ξ, x_1^*) presenta, oltre all'asintoto orizzontale $x_1^* = 0$ ed al caratteristico comportamento « tipo Duffing » con $\xi \to \infty$ e $x_1^* \to \infty$, *anche un asintoto verticale* per $\xi = \varepsilon/\mu'$. A tale asintoto tendono due rami distinti della curva. Un terzo ramo attraverso l'asintoto stesso con una certa ordinata finita A. È interessante osservare che la posizione di tale asintoto verticale corrisponde, in base alle (3.4) e (3.5), al valore seguente del parametro ν:

$$(4.14)\qquad \nu = \omega_1/\sqrt{(1+\mu)} \qquad (\text{corrisponde a } \xi = \varepsilon + \mu')$$

in corrispondenza del quale nel caso lineare $k' = 0$ (e quindi $\bar{f}_1 = 0$, (v. fig. 2*a*) si ha risonanza infinita per $\gamma \to \infty$, ossia quando le due masse « fanno corpo ».

Il comportamento sopra descritto della curva di risposta in prossimità di $\xi = \varepsilon/\mu'$ sussiste anche nel caso $k' < 0$, con la variante che i due rami di curva tendono all'asintoto da destra, anziché da sinistra come nel caso precedente, rispetto al valore $\xi = \varepsilon/\mu'$ e uno di essi attraverso anche l'asintoto stesso con una certa ordinata finita A. Ciò è indicato nella fig. 2*c* corrispondente ai valori $\mu' = 2$, $\varepsilon = 5$, $\bar{f}_1 = -4$. In fig. 3 sono riportate, in funzione di ξ, le ampiezze delle oscillazioni delle masse m_1 ed m_2 e del loro moto relativo, in assenza di dissipazione viscosa e per $\mu' = 1.25$, $\varepsilon = 5$, $\bar{f}_1 = 4$.

B) *Con dissipazione viscosa* $\gamma \neq 0$

Le (3.15), (3.18), (3.19), (3.20) si riducono a:

$$(4.15)\quad \left[\varepsilon - \xi + (\mu' - \varepsilon/\xi)\left(1 + \frac{3}{4}\,\eta^*\right)\right]^2 + \gamma^2\xi(\mu' - \varepsilon/\xi)^2 = \bar{f}_1/\eta^*$$

$$(4.16)\quad \varrho^* = 1/\xi \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\,\eta^*\right)^2 + \gamma^2/\xi}$$

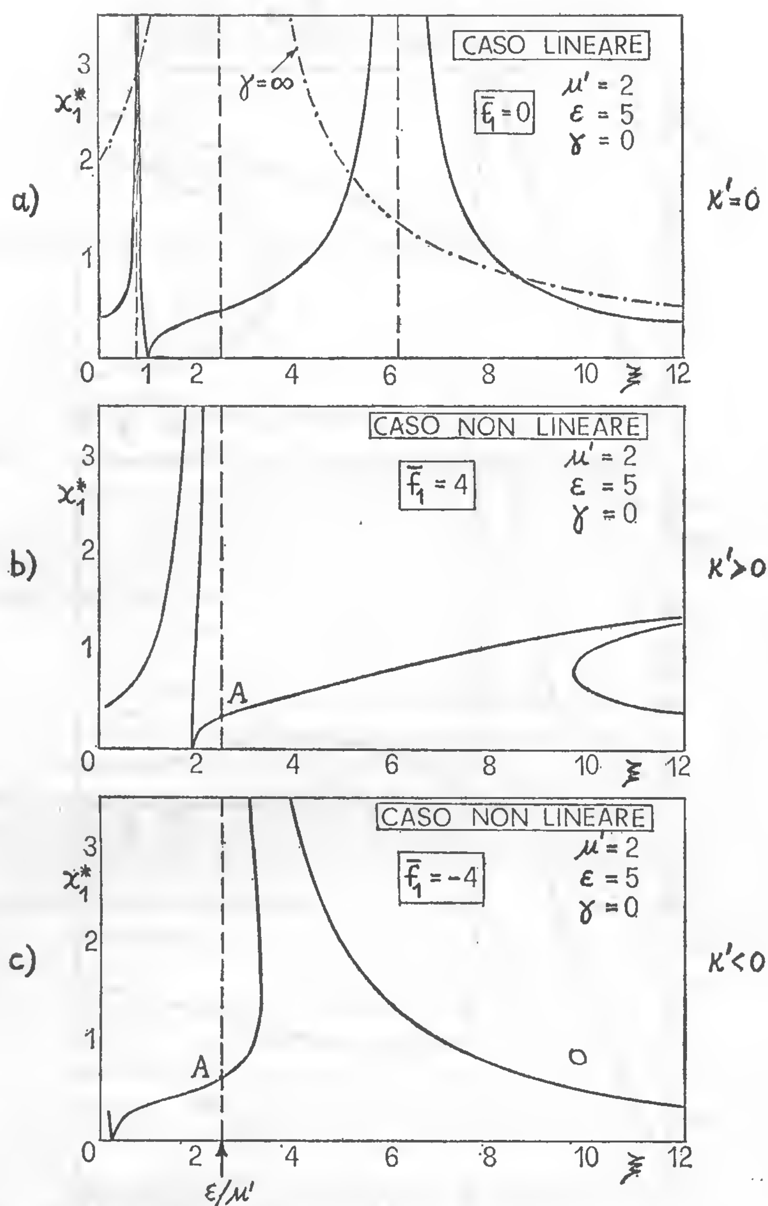


Fig. 2 – Curve di risposta in ampiezza x_1^* per la massa m_1, senza dissipazione, nell'ipotesi di forme d'onda sinusoidale (prima approssimazione). Caso *a*) : $k' = 0$ (lineare); caso *b*) : $k' > 0$ (« hardening »); caso *c*) : $k' < 0$ (« softening »).

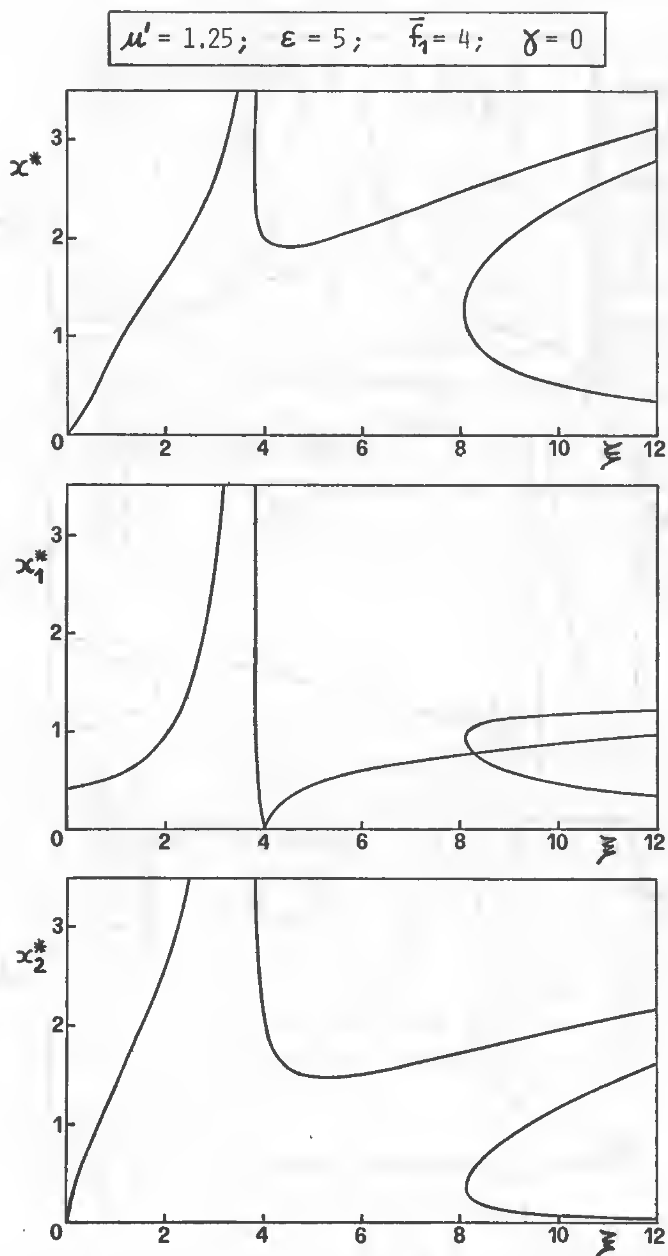


Fig. 3 – Curve di risposta in ampiezza per le masse m_1 ed m_2 e per il loro moto relativo, senza dissipazione, nell'ipotesi di forma d'onda sinusoidale (prima approssimazione).

$$(4.17)\qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\gamma\sqrt{\xi}\,(\mu' - \varepsilon/\xi)}{\varepsilon - \xi + (\mu' - \varepsilon/\xi)\left(1 + \frac{3}{4}\eta^*\right)} \qquad (\sin\vartheta \gtrless 0 \quad \text{per} \quad \mu' \gtrless \varepsilon/\xi)$$

$$(4.18)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\gamma\sqrt{\xi}}{1 + \frac{3}{4}\eta^*} \qquad (\sin\alpha < 0)$$

e forniscono direttamente la soluzione del problema essendo:

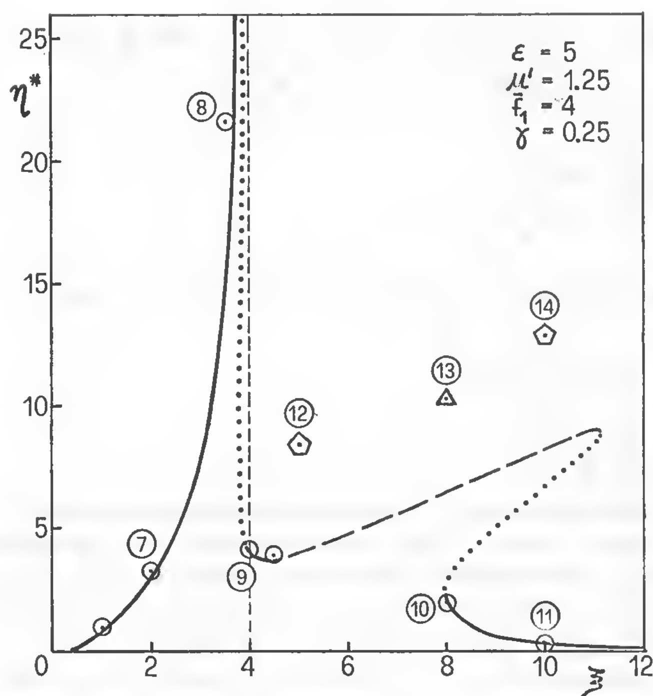
$$(4.19)\qquad \begin{cases} x^* = \sqrt{\dfrac{k}{k'}\eta^*} \\ y^* = \varrho^* x^* \end{cases}$$

La cubica fondamentale (4.15) risulta essere di *quarto grado* in ξ, anziché di secondo come la (4.11). Essa richiede pertanto una discussione un po' più complicata. Le conclusioni fondamentali sono: in primo luogo il doppio ramo con ξ ed η^* entrambi infiniti, che si presentava per $\gamma = 0$, ora non si presenta più, ma viene sostituito da un semplice lobo, più o meno allungato rispettivamente per γ piccolo o grande; in secondo luogo, e questa appare la proprietà più importante ed in un certo senso più strana, in prossimità del valore $\xi = \varepsilon/\mu'$ la curva di risposta che dà la η^* in funzione di ξ continua a presentare lo stesso comportamento che si aveva per $\gamma = 0$, e cioè un asintoto verticale al quale tendono due rami della curva, e inoltre l'attraversamento dell'asintoto stesso per lo stesso valore di ξ e con una ordinata finita. Tutto ciò appare dal diagramma di fig. 4 che si riferisce al caso $\mu' = 1.25$, $\varepsilon = 5$, $\bar{f}_1 = 4$, $\gamma = 0.25$. In conclusione dunque *secondo questa prima approssimazione l'inserimento di uno smorzatore viscoso interno tra le due masse non elimina la possibilità di una risonanza infinita per il valore* (4.11) *di* ν. Appare superfluo sottolineare la fondamentale differenza di comportamento rispetto al caso lineare $k' = 0$.

Riguardo infine all'*effettiva* presenza di una risonanza infinita per $\xi = \varepsilon/\mu'$ è chiaro che nella presente prima approssimazione essa non può essere né confermata né smentita perché l'approssimazione, come si disse, è dubbia per ξ limitato ed x^* infinitamente grande. Tuttavia tale risonanza infinita appare confermata esattamente, nel senso sopra descritto, dai risultati della integrazione numerica di cui si farà cenno nel n. 8.

5. — Studio di una seconda approssimazione.

Seguendo il programma indicato nel n. 2 effettuiamo ora la linearizzazione delle equazioni integrali (3.8) nella ipotesi che le funzioni incognite



△ SUB-ARMONICHE 1/3

⬠ SUB-ARMONICHE 1/5 ⊙ INTEGRAZIONE NUMERICA

——— regioni di stabilità; .... regioni di instabilità; – – – – regioni di instabilità con possibilità di sub-armoniche.

Fig. 4 – Curva di risposta in ampiezza per il moto relativo delle due masse, con dissipazione viscosa nell'ipotesi di forma d'onda sinusoidale (prima approssimazione). Vedi anche considerazioni al n. 8'.

$\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ siano piccole rispetto all'unità. Otteniamo in tal modo il seguente sistema di equazioni integrali di Volterra nelle incognite suddette.:

$$\begin{cases} \xi \cos \tau \varphi(\tau) = g(\tau) + \int_{-\pi/2}^{\tau} K(\tau, s)\varphi(s)ds + \int_{-\pi/2}^{\tau} H(\tau, s)\psi(s)ds & (5.1)\\ \xi\varrho^* \cos(\tau+\alpha)[\psi(\tau) - \varphi(\tau)] = h(\tau) + & (5.2)\\ \qquad + \int_{-\pi/2}^{\tau} K_0(s)\varphi(s)ds + \xi\varrho^* \sin(\tau+\alpha)\int_{-\pi/2}^{\tau}\psi(s)ds \end{cases}$$

dove i vari nuclei valgono:

$$K(\tau, s) = (\mu' + \varepsilon)\sin s + \mu'\eta^* \sin^3 s + \varepsilon\varrho^* \sin(s+\alpha) - \lambda^* \sin(\tau+\vartheta) \quad (5.3)$$

(5.4) $$K_0(s) = \sin s + \eta^* \sin^3 s$$

(5.5) $$H(\tau, s) = \varepsilon\varrho^*[\sin(\tau + \alpha) - \sin(s + \alpha)]$$

e le funzioni $g(\tau)$ ed $h(\tau)$ sono date sempre dalle (3.9) . . . (3.12). Anche qui converrà distinguere i due casi senza e con dissipazione viscosa ossia:

A) *senza dissipazione viscosa*: $\gamma = 0$

Sussistono le (4.7), (4.8) e (4.9) insieme alle:

(5.6) $$g_1 = h_1 = 0$$

Per le funzioni incognite $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ cerchiamo soluzioni approssimate del tipo:

(5.7) $$\begin{cases} \varphi(\tau) = B \cos 2\tau \\ \psi(\tau) = D \cos 2\tau \end{cases}$$

Sostituendo nelle (5.1) e (5.2) si ottiene che le equazioni stesse possono essere soddisfatte in modo approssimato bilanciando tutti i termini trigonometrici tranne i seguenti:

(5.8) $$\begin{cases} \dfrac{1}{40} \dfrac{\mu'\eta^*}{\xi} B \cos 5\tau & \text{nella prima equazione} \\[2ex] \dfrac{1}{40} \dfrac{\eta^*}{\xi\varrho^*} B \cos 5\tau & \text{nella seconda equazione} \end{cases}$$

Il procedimento porta ad imporre quattro condizioni lineari per il vettore incognito:

(5.9) $$\underline{X} = (B, D, g_0, h_0)$$

alle quali si può dare la forma seguente:

(5.10) $$\begin{cases} a_2 B + \dfrac{1}{12} \varepsilon\varrho^{**} D = \dfrac{1}{12} \mu'\eta^* \\[2ex] a_4 B + \dfrac{3}{4} \xi\varrho^{**} D = \dfrac{1}{12} \eta^* \end{cases}$$

(5.11) $$\begin{cases} g_0 = a_1 B + \dfrac{1}{4} \varepsilon\varrho^{**} D \\[2ex] h_0 = a_3 B + \dfrac{1}{4} \xi\varrho^{**} D \end{cases}$$

con:

$$(5.12)\quad \begin{cases} 2a_1 = \xi - (\mu' + \varepsilon) - \mu'\eta^* + \dfrac{1}{2}\lambda^{**} - \varepsilon\varrho^{**} \\ 2a_2 = \xi + \dfrac{1}{3}(\mu' + \varepsilon) + \dfrac{1}{4}\mu'\eta^* - \dfrac{1}{2}\lambda^{**} + \dfrac{1}{3}\varepsilon\varrho^{**} \\ 2a_3 = -(1 + \eta^* + \xi\varrho^{**}) \\ 2a_4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\eta^* - \xi\varrho^{**} \end{cases} \qquad \text{con:} \begin{cases} \lambda^{**} = a/x^{**} \\ \eta^* = bx^{**2} \end{cases}$$

Scriveremo sinteticamente le (5.10) e (5.11) così:

$$(5.13)\qquad [\mathcal{A}]\underline{X} = \underline{a}$$

dove la matrice $4 \times 4\,[\mathcal{A}]$ ed il vettore $\underline{a}$ si leggono direttamente dalle (5.10) e (5.11) stesse.

Alle (5.13) devono essere associate le (3.15) e (3.18) che ora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} (5.14)\quad \xi^2 - \left[\varepsilon + g_0 + \mu'\left(1 + \dfrac{3}{4}bx^{**2}\right) - a/x^{**}\right]\xi + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\left(1 + \dfrac{3}{4}bx^{**2} + h_0\right) = 0 \\ (5.15)\quad \varrho^{**} = -1/\xi \cdot \left(1 + \dfrac{3}{4}bx^{**2} + h_0\right) \end{cases}$$

Indicheremo sinteticamente la (5.14) così:

$$(5.16)\qquad Q_3(x^{**};\, g_0,\, h_0) = 0$$

Il sistema formato dalle quattro equazioni (5.13) e dalle (5.15) e (5.16) si può risolvere numericamente secondo il seguente schema iterativo:

$$(5.17)\quad \begin{cases} Q_3(x^{**}_{(n)};\, g_{0(n)},\, h_{0(n)}) = 0 \\ \varrho^{**}_{(n)} = -\dfrac{1}{\xi}(1 + bx^{**2}_{(n)} + h_{0(n)}) \\ [\mathcal{A}]_{(n)}\underline{X}_{(n+1)} = \underline{a}_{(n)} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

con la condizione iniziale

$$\underline{X}_{(1)} = 0$$

In tal modo i valori di prima approssimazione $x^{**}_{(1)}$ e $\varrho^{**}_{(1)}$ vengono a coincidere con i valori di prima approssimazione già calcolati nel n. 4 dati dalle

(4.11) e (4.12). Il calcolo delle approssimazioni successive è ricondotto alla soluzione ripetuta della cubica (5.14) e del sistema lineare (5.13), sostanzialmente di secondo ordine, come espresso dalle (5.10) e (5.11).

Riassumendo questa seconda approssimazione senza dissipazione abbiamo la seguente soluzione in forma parametrica:

$$\left\{\begin{aligned} \nu t &= \tau + B \sin \tau \cos \tau \\ x &= x^{**} \sin \tau \\ y &= y^{**} \sin (\tau + D \sin \tau \cos \tau) \\ x_1 &= x^{**} [\sin \tau + \varrho^{**} \sin (\tau + D \sin \tau \cos \tau)] \end{aligned}\right. \tag{5.18}$$

Le forme d'onda corrispondenti risultano *doppiamente simmetriche,* ma *non sinusoidali*, come appare dagli esempi riportati in fig. 5([1]) corrispondenti allo stesso caso di fig. 3, e cioè $\mu' = 1.25$; $\varepsilon = 5$, $\overline{f}_1 = 4$.

B) *con dissipazione viscosa*: $\gamma \neq 0$

In questo caso cerchiamo per le funzioni incognite $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ soluzioni approssimate del tipo

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\tau) &= A \sin 2\tau + B \cos 2\tau \\ \psi(\tau) &= C \sin 2\tau + D \cos 2\tau \end{aligned}\right. \tag{5.19}$$

Sostituendo nelle (5.1) e (5.2) si ottiene che le equazioni stesse possono essere soddisfatte in modo approssimato bilanciando tutti i termini trigonometrici tranne i seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{40}\,\frac{\mu'\eta^*}{\xi}\,[A(1+\sin 5\tau) + B\cos 5\tau] \quad \text{nella prima equazione} \\ &\frac{1}{40}\,\frac{\eta^*}{\xi\varrho^*}\,[A(\sin 5\tau + 1) + B\cos 5\tau] \quad \text{nella seconda equazione} \end{aligned}\right. \tag{5.20}$$

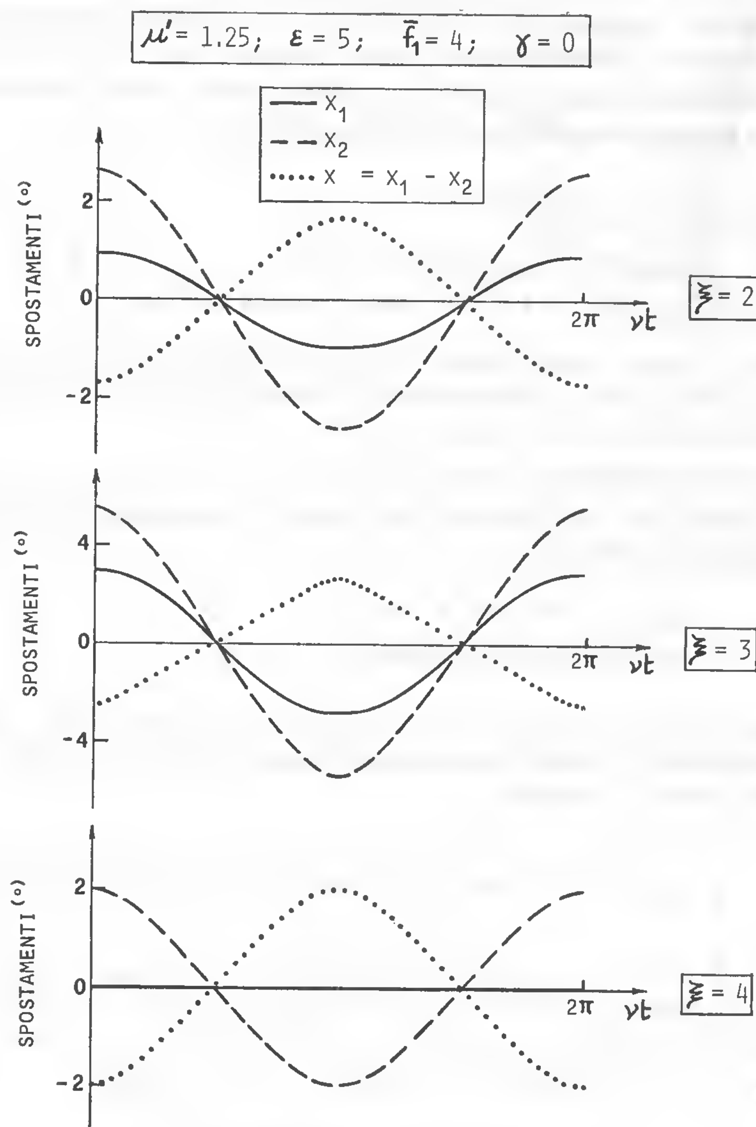
Si hanno così *otto condizioni* lineari nei due vettori incogniti:

$$\underline{Y} = (A, B, C, D) \quad \text{e} \quad \underline{G} = (g_0, g_1, h_0, h_1) \tag{5.21}$$

che, a conti fatti, si vede che si spezzano nel modo seguente:

$$[\mathfrak{B}]\underline{Y} = \underline{b}\,; \qquad \underline{G} = [\mathfrak{C}]\underline{Y} \tag{5.22}$$

([1]) L'elaborazione numerica dell'algoritmo iterativo (5.17) è in corso di studio da parte di R. Riganti. Riportiamo qui alcuni suoi risultati preliminari.



(°) UNITÀ DI MISURA PER GLI SPOSTAMENTI: $r = \sqrt{K/|K'|}$.

Fig. 5 – Forme d'onda degli spostamenti delle masse m_1 ed m_2 e dello spostamento relativo x, senza dissipazione, nella seconda approssimazione. Per la corrispondente prima approssimazione v. fig. 3.

con:

$$(5.23)\qquad [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \frac{1}{12}\,\varepsilon\varrho_1 & \frac{1}{12}\,\varepsilon\varrho_2 \\ b_{21} & b_{22} & \frac{1}{12}\,\varepsilon\varrho_2 & -\frac{1}{12}\,\varepsilon\varrho_1 \\ -\frac{1}{2}\,\xi\varrho_1 & b_{32} & \frac{3}{4}\,\xi\varrho_1 & \frac{3}{4}\,\xi\varrho_2 \\ b_{41} & \frac{1}{2}\,\xi\varrho_1 & \frac{3}{4}\,\xi\varrho_2 & -\frac{3}{4}\,\xi\varrho_1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \frac{1}{12}\,\eta^* \begin{bmatrix} \mu' \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(5.24)\qquad [\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & +\frac{1}{4}\,\varepsilon\varrho_1 & \frac{1}{4}\,\varepsilon\varrho_2 \\ c_{21} & c_{22} & \frac{3}{4}\,\varepsilon\varrho_2 & \frac{1}{4}\,\varepsilon\varrho_1 \\ \frac{1}{2}\,\xi\varrho_1 & c_{32} & \frac{1}{4}\,\xi\varrho_1 & \frac{1}{4}\,\xi\varrho_2 \\ c_{41} & -\frac{1}{2}\,\xi\varrho_1 & \frac{3}{4}\,\xi\varrho_2 & \frac{1}{4}\,\xi\varrho_1 \end{bmatrix}$$

dove si è posto:

$$(5.25)\qquad \begin{cases} \varrho^* \sin\alpha = \varrho_1 \\ \varrho^* \cos\alpha = \varrho_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda^* \sin\vartheta = \lambda_1 \\ \lambda^* \cos\vartheta = \lambda_2 \end{cases}$$

$$(5.26)\qquad \begin{cases} 2b_{11} = -\frac{1}{2}\,\lambda_1 + \frac{1}{3}\,\varepsilon\varrho_1 \\ 2b_{12} = 2b_{21} = \xi + \frac{1}{3}\,(\mu' + \varepsilon) + \frac{1}{4}\,\mu'\eta^* - \frac{1}{2}\,\lambda_2 + \frac{1}{3}\,\varepsilon\varrho_2 \\ 2b_{22} = \frac{1}{2}\,\lambda_1 - \frac{1}{3}\,\varepsilon\varrho_1 \\ 2b_{32} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,\eta^* - \xi\varrho_2 \\ 2b_{41} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,\eta^* - \xi\varrho_2 \end{cases}$$

$$
(5.27)\quad \begin{cases}
2c_{11} = -\dfrac{3}{2}\lambda_1 + \varepsilon\varrho_1 \\[2mm]
2c_{12} = \xi - (\mu' + \varepsilon) - \mu'\eta^* + \dfrac{1}{2}\lambda_2 - \varepsilon\varrho_2 \\[2mm]
2c_{21} = \xi - (\mu' + \varepsilon) - \dfrac{1}{2}\mu'\eta^* - \dfrac{1}{2}\lambda_2 - \varepsilon\varrho_2 \\[2mm]
2c_{22} = \dfrac{1}{2}\lambda_1 - \varepsilon\varrho_1 \\[2mm]
2c_{32} = -(1 + \eta^* + \xi\varrho_2) \\[2mm]
2c_{41} = -\left(1 + \dfrac{1}{2}\eta^* + \xi\varrho_2\right)
\end{cases}
$$

Alle (5.22) devono essere associate la cubica fondamentale (3.15), sintetizzata nella (3.16), e le (3.18), (3.19) e (3.20), sintetizzate nella (3.21). Per la risoluzione numerica del sistema algebrico complessivo che così si ottiene suggeriamo il seguente schema iterativo:

$$
(5.28)\quad \begin{cases}
P_3(\eta_{(n)}\,;\,\underline{G}_{(n)}) = 0 \\
(\varrho^*, \vartheta, \alpha)_{(n)} = \Omega(\eta_{(n)}\,;\,\underline{G}_{(n)}) \\
[\mathcal{B}]_{(n)}\underline{Y}_{(n+1)} = \underline{b}_{(n)} \\
\underline{G}_{(n+1)} = [\mathcal{C}]_{(n)}\underline{Y}_{(n+1)}
\end{cases}
\qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)
$$

con le condizioni iniziali:

$$
(5.29)\qquad \underline{G}_{(1)} = 0\,, \qquad \underline{Y}_{(1)} = 0
$$

In tal modo i valori di prima approssimazione $\eta^*_{(1)}$ e $(\varrho^*, \vartheta, \alpha)_{(1)}$ vengono a coincidere con i valori di prima approssimazione calcolati nel n. 4 e dati dalle (4.15) . . . (4.18).

Il metodo indicato richiede la soluzione ripetuta della cubica (3.15) e del sistema lineare di quart'ordine nell'incognita $\underline{Y}$ dato dalla prima delle (5.22). *Riassumendo* questa seconda approssimazione con dissipazione viscosa abbiamo la seguente soluzione in forma parametrica:

$$
(5.30)\quad \begin{cases}
\nu t = \tau + \vartheta - \dfrac{1}{2}A(\cos 2\tau + 1) + B\sin\tau\cos\tau \\[2mm]
\sigma = \tau + \alpha - \dfrac{1}{2}C(\cos 2\tau + 1) + D\sin\tau\cos\tau \\[2mm]
x = \sqrt{\dfrac{k}{k'}\eta^*}\,\sin\tau\,; \qquad y = \varrho^*\sqrt{\dfrac{k}{k'}\eta^*}\,\sin\sigma \\[2mm]
x_1 = x + y = \sqrt{\dfrac{k}{k'}\eta^*}\,(\sin\tau + \varrho^*\sin\sigma)
\end{cases}
$$

In fig. 6 sono riportati alcuni risultati numerici preliminari relativi al caso $\mu' = 1.25$; $\varepsilon = 5$; $\bar{f}_1 = 4$; $\gamma = 0.25$ ottenuti da R. Riganti utilizzando lo schema iterativo (5.28).

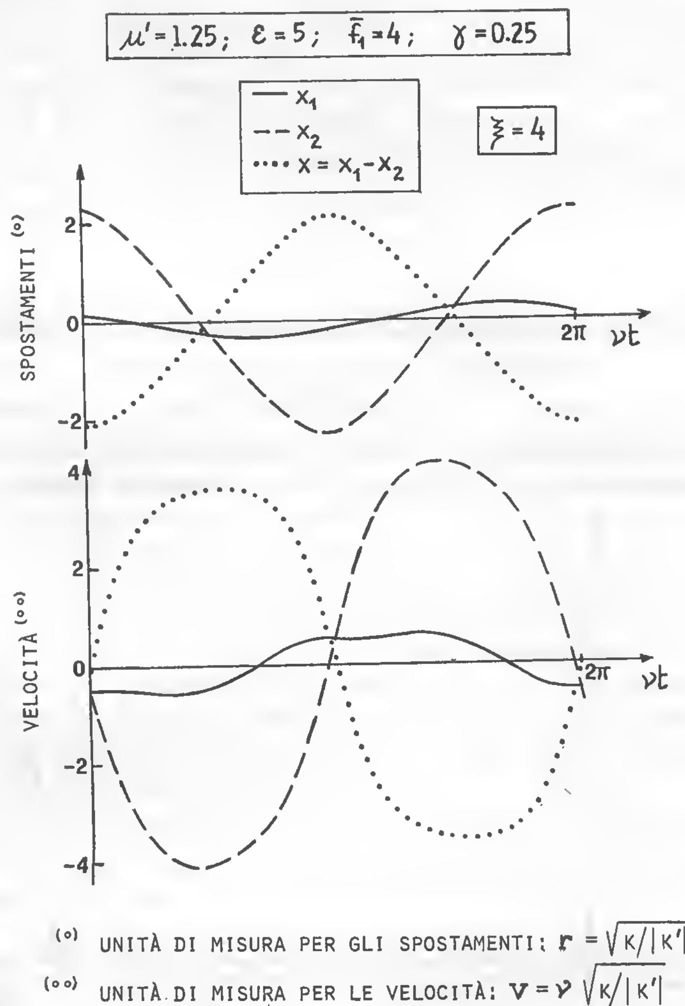


Fig. 6 – Forme d'onda degli spostamenti delle masse m_1 ed m_2 e dello spostamento relativo x, con dissipazione viscosa, nella seconda approssimazione. Si confronti coi diagrammi esatti ⑨ di fig. 8 ottenuti con integrazione numerica.

6. — Analisi della possibilità che la massa principale stia ferma.

Nel caso di assenza di dissipazione è ben noto che *nel caso lineare* è possibile che la massa m_1 resti ferma nonostante la sollecitazione esterna, purché la pulsazione della forzante sia opportuna. Precisamente si riconosce che se è $k' = 0$ risulta:

$$x_1 = 0 \quad \text{per} \quad \xi = 1 \tag{6.1}$$

Nasce spontanea la domanda se tale circostanza può presentarsi anche nel caso non lineare, ossia per $k' \neq 0$, sempre con $\gamma = 0$. Orbene si dimostra, ed omettiamo qui la facile dimostrazione, che il sistema (3.11) non può mai ammettere la soluzione $x_1 = x + y \equiv 0$, a meno che non sia appunto $k' = 0$. Vogliamo allora esaminare come si comportano alla luce di questa proprietà le due approssimazioni studiate nei numeri 4 e 5. Per quanto concerne la *prima approssimazione*, dalla (4.13) risulta che la condizione $x_1^{**} = 0$ implica che sia:

$$\xi = 1 + \frac{3}{4} b x^{**2} \tag{6.2}$$

Eliminando x^{**} tra le (6.2) e la cubica (4.11) si ottiene la seguente equazione in ξ:

$$\xi^3 - \xi^2 = 3/4 \, . \, \overline{f}_1/\mu^2 \tag{6.3}$$

che, come si vede dalla fig. 7, ammette sempre una ed una sola radice reale maggiore di uno per qualunque valore del secondo membro, sempre

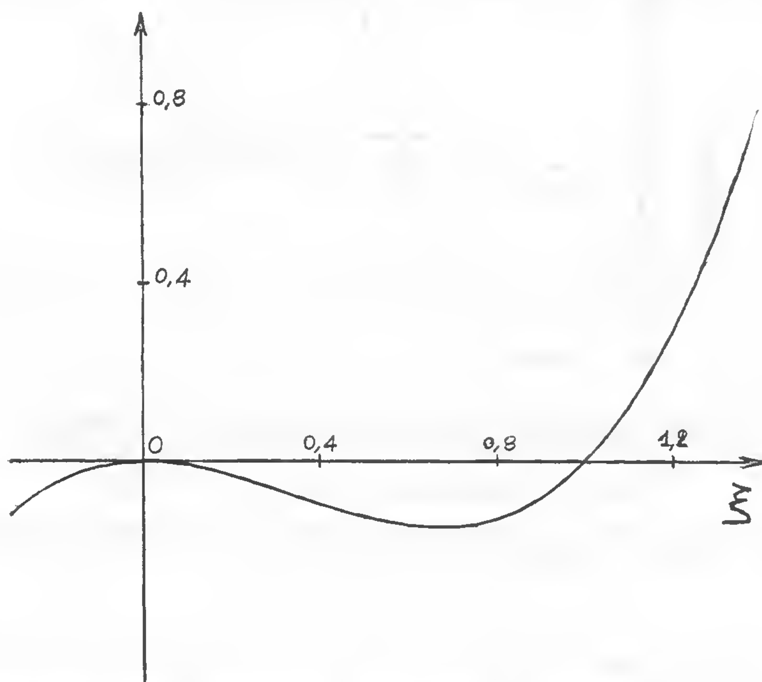


Fig. 7 – Diagramma ausiliario: funzione $\xi^3 - \xi^2$, v. formula (6.3).

positivo. Nel caso limite $k' = 0$ risulta $\overline{f}_1 = 0$ e si riottiene il valore $\xi = 1$ del caso lineare (6.1). Dunque *nell'approssimazione dell'onda sinusoidale si*

ritrova la possibilità che la massa m_1 stia ferma, che invece non sussiste da un punto di vista rigoroso.

Passando alla *seconda approssimazione* esaminiamo l'ultima delle (5.18). Essendo la costante D diversa da zero appare evidente che non è mai possibile che la funzione x_1 risulti identicamente nulla rispetto a τ, e quindi a t. Dunque in questa seconda approssimazione si viene ad escludere, come deve essere, che la massa m_1 stia ferma.

Le considerazioni ora svolte mostrano che l'analisi della possibilità che la massa m_1 stia ferma costituisce un « test » interessante riguardo ai limiti di validità delle diverse approssimazioni nel caso $\gamma = 0$.

7. — Alcuni risultati preliminari ottenuti da R. Riganti mediante integrazione numerica.

Il sistema di equazioni differenziali (3.1) che regge il moto dell'ammortizzatore dinamico studiato nei numeri precedenti è attualmente oggetto di studi sistematici da parte di R. Riganti da un diverso punto di vista, che riteniamo qui opportuno segnalare. Precisamente le (3.1) vengono integrate numericamente con metodo Runge-Kutta partendo dai dati iniziali forniti dalla prima approssimazione qui sviluppata nel n. 4. Il procedimento numerico viene portato avanti fino a quando si ottiene una *forma d'onda stabile*, tale cioè che procedendo ulteriormente nell'integrazione si riottenga praticamente la stessa onda. Pur senza entrare qui nei dettagli del procedimento di integrazione vogliamo segnalare da un punto di vista qualitativo i risultati ottenuti. Si distinguono essenzialmente quattro tipi di risultati (cfr. fig. 4):

a) *Onda asintoticamente stabile*, con prevalenza dell'armonica principale. In tal caso la seconda approssimazione da noi qui sviluppata nel n. 5 appare molto buona;

b) come sopra, ma con *prevalenza di armoniche superiori*. In questo caso la seconda approssimazione è ancora buona, ma bisognerebbe tentare di risolvere in modo rigoroso, o comunque migliore, le equazioni integrali esatte non lineari (3.13);

c) come sopra, ma *con presenza di armoniche inferiori*, o sub-armoniche (periodo $3\mathcal{T}$ etc.). La presente teoria può ancora servire se opportunamente ritoccata;

d) *onda non asintoticamente stabile*, nel senso che non si ottiene la soluzione a regime. Tali sono ad esempio tutti i casi con $\gamma = 0$. È peraltro da osservare che, con $\gamma = 0$, questa circostanza si riscontra già anche nel caso lineare.

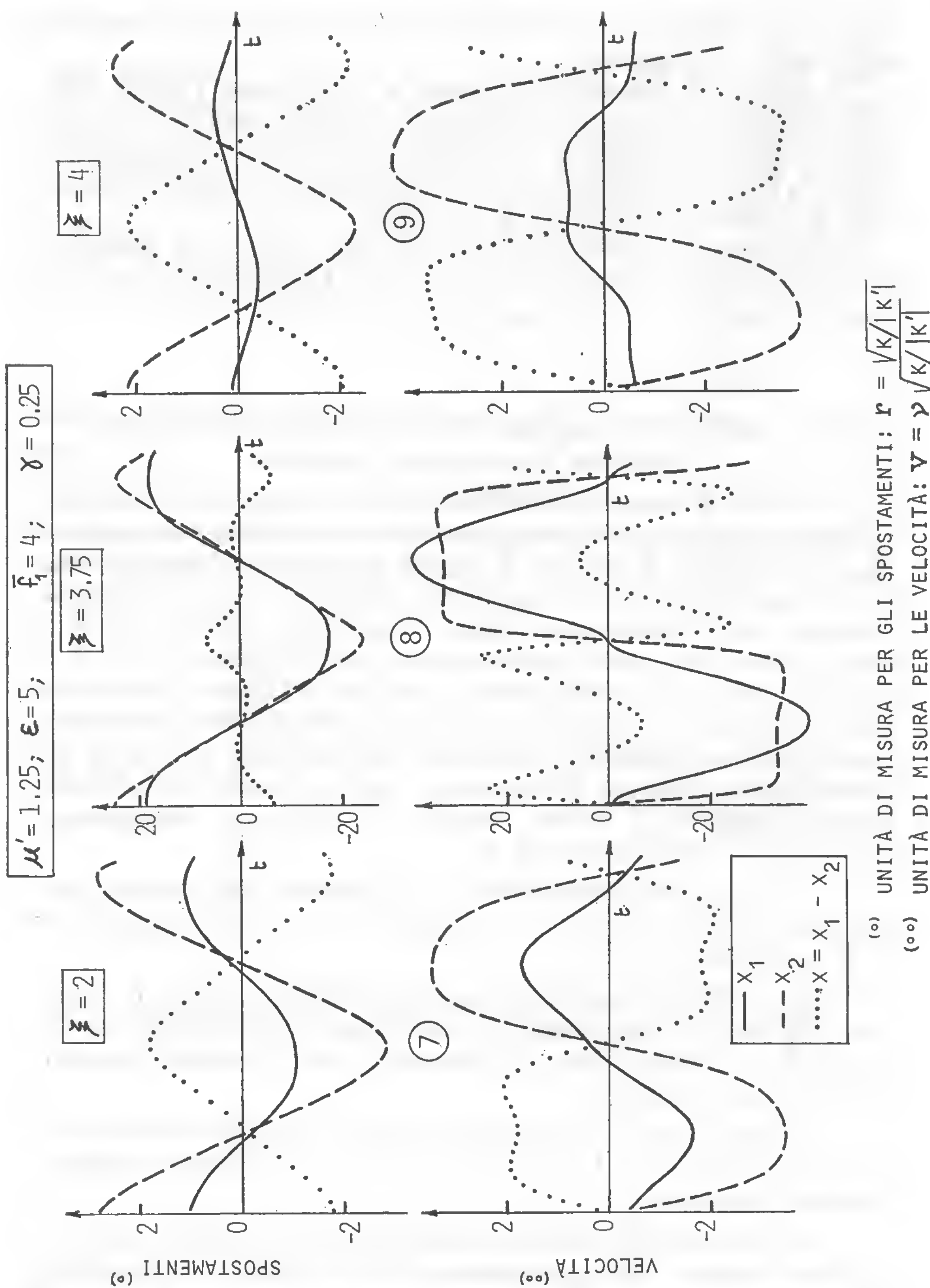


Fig. 8 – Risultati preliminari dell'integrazione numerica: spostamenti e velocità delle masse m_1 e m_2, e relativi, con dissipazione viscosa. Si osservi l'accordo del caso ⑨ coi risultati di seconda approssimazione di fig. 6, ottenuti col metodo iterativo (5.28).

Alcuni esempi particolareggiati di risultati del tipo a) e b) sono riportati nella fig. 8, che si riferisce al caso $\varepsilon = 5$, $\mu' = 1.25$, $\bar{f}_1 = 4$, $\gamma = 0.25$. In particolare il punto ⑧ sembra confermare la presenza di soluzioni stabili con ampiezza tendente all'infinito, e cioè la presenza di risonanza infinita per $\xi = \varepsilon/\mu'$ nonostante la presenza dello smorzatore viscoso interno, come già previsto al n. 4 nella prima approssimazione. Si osservi però la forma d'onda fortemente non sinusoidale.

BIBLIOGRAFIA

[1] Nocilla S., « Sulle vibrazioni forzate di una classe di sistemi non lineari ad un grado di libertà », Parte I - Atti 2° Congresso Naz. AIMETA (Napoli 1974) vol. 1, p. 117; in corso di pubblicazione su « Meccanica ».

[2] Riganti R., « Sulle vibrazioni forzate di una classe di sistemi non lineari ad un grado di libertà », Parte II - Atti 2° Congresso Naz. AIMETA (Napoli 1974) vol. 1, p. 129; in corso di pubblicazione su « Meccanica ».

[3] Nocilla S.-Riganti R., « Forced vibration of a class of non linear systems with one degree of freedom », Mech. Res. Comm., vol. 1 (1974), pp. 197-202.

[4] Nocilla S., « Sull'integrazione delle equazioni del tipo: $\ddot{x} + c(x)\,\dot{x}\,|\,\dot{x}\,|^{n-1} + k(x) = 0$ », (in corso di stampa sugli Annali di Mat.).

[5] Pipes L. A., « Analysis of a non linear dynamics vibration absorber », Jour. Appl. Mech. Transl. ASME, vol. 75 (dic. 1953), p. 515.

[6] Klotter-Abramson-Pipes, (discussione) ibidem (sett. 1954), p. 299 e segg.

[7] Lou C. L.-Sikarskie D. L., « A new type of non-linear approximation with application to the Duffing equation », Int. Jour. Non-Linear Mechanics, vol. 9 (1974), pp. 179-191.

[8] Rosemberg R. M., « On non linear vibrations with many degrees of freedom », Adv. in Appl. Mech., vol. 9 (1966).

[9] Massa E., *Vibrazioni forzate e loro stabilità in sistemi non lineari a due gradi di libertà*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », vol. XXXII (1962), pag. 1.

[10] Massa E., Ruggieri G., *Caratteristiche di funzionamento e possibilità di impiego dell'assorbitore dinamico non lineare in sistemi vibranti smorzati*, « Rend. Ist Lombardo Scienze e Lettere », (A), vol. 101 (1967), pag. 797.

[11] Ruggieri G., *Analisi mediante calcolatore analogico del comportamento dell'assorbitore dinamico non lineare*, « I Congresso Naz. AIMETA », Udine (1971), vol. III, parte I, pag. 237.

G. GABRIELLI (*)

Sulla valutazione in fase di progetto preliminare dei rendimenti dei sistemi motopropulsore-velivolo.

Riassunto. — *Tra i parametri che si adottano nel dimensionamento generale di massima di un velivolo, quelli relativi al motopropulsore hanno una particolare importanza specie se è un turbogetto.*

In quest'ultimo, infatti, gli effetti della interazione e delle interferenze aerodinamiche tra prese d'aria, cellula e motore hanno effetti generalmente più vistosi e complessi di quelli che assistono tra elica, motore e cellula nei velivoli ad elica.

Non è possibile, salvo casi particolari, valutare in sede di progetto preliminare di massima con una ragionevole approssimazione tali effetti.

L'A. considera il sistema motopropulsore-velivolo come un motopropulsore che fornisce la spinta o la potenza richieste nelle condizioni di volo orizzontale considerate ed al quale vengono attribuiti tutti gli effetti sopraddetti della integrazione del motopropulsore nel velivolo mediante un incremento del consumo specifico ed una riduzione del rendimento propulsivo.

L'incrcmento di consumo specifico tiene conto degli effetti interni sul motore e la riduzione di rendimento propulsivo tiene conto dell'aumento di resistenza aerodinamica rispetto a quella del velivolo isolato per effetto delle interferenze aerodinamiche esterne entrambe dovute alla installazione del motopropulsore.

A tale scopo l'A. introduce dei fattori che esprimono gli effetti della integrazione, interna ed esterna, i cui valori possono essere fissati nella fase iniziale di progetto di massima in base a dati su velivoli similari.

In tal modo è possibile esprimere i rendimenti del sistema motopropulsore-velivolo in funzione di parametri del progetto e procedere alla determinazione delle prestazioni del velivolo.

Queste debbono essere rivedute in un processo di successive approssimazioni nel corso dello sviluppo del progetto.

(*) Politecnico di Torino.

SIMBOLI

V_0	Velocità orizzontale del velivolo	$\left[\frac{m}{s}\right]$
V_2	Velocità del getto all'uscita del reattore o all'infinito a valle nella scia rispetto all'elica	$\left[\frac{m}{s}\right]$
a	Velocità del suono nell'aria	$\left[\frac{m}{s}\right]$
ϱ	Densità dell'aria a quota zero	$\left[\frac{Kgs^2}{m^4}\right]$
g	Accelerazione di gravità	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
C_s	Consumo specifico di combustibile nei motori volumetrici od a turbina	$\left[\frac{Kg}{CVh}\right]$
C_s^*	Consumo specifico di combustibile nei turbogetti	$\left[\frac{Kg}{Kgh}\right]$
J	Equivalente meccanico del calore	$\left[\frac{Kgm}{Kcal}\right]$
p_c	Potere calorifico del combustibile	$\left[\frac{Kcal}{Kg}\right]$
T	Spinta	[Kg]
Π	Potenza meccanica sull'albero motore	[CV]
Q_a	Portata in peso dell'aria nei turbogetti	$\left[\frac{Kg}{s}\right]$
n	Giri dell'elica	$[s^{-1}]$
S	Superficie alare	$[m^2]$
η_p	Rendimento propulsivo	[0]
η_m	Rendimento termico del motore	[0]
η_g	Rendimento globale	[0]
η_e	Rendimento dell'elica isolata	[0]
μ	Rapporto ponderale combustibile-aria nei turbogetti	[0]
δ	Densità relativa dell'aria	[0]
C_D	Coefficiente di residenza del velivolo isolato	[0]
M	Numero di Mach di volo	[0]

I metodi per il proporzionamento di massima di un velivolo nella fase di progetto preliminare si basano su dati (velocità massima o di crociera, velocità minima o lunghezza di decollo ed atterramento, quota di tangenza, carico pagante, autonomia, ecc.) e conducono alla determinazione di alcune grandezze principali del velivolo come il peso totale, la superficie alare ed il suo allungamento, la potenza o la spinta installata, ecc.

A tale scopo occorre esprimere il valore di alcune grandezze relative ai pesi delle strutture e del gruppo motopropulsore, alcuni coefficienti aerodinamici di resistenza, di portanza e le caratteristiche del motopropulsore in funzione delle incognite e di alcuni parametri, detti basici, quale il carico alare, la spinta o la potenza superficiale.

L'insieme degli elementi sopraddetti e di alcune grandezze che hanno un valore «fisso», il cui valore è cioè indipendente dai parametri variabili del progetto viene utilizzato nelle equazioni di compatibilità che traducono le varie condizioni del progetto e dalle quali è possibile dedurre le grandezze principali del velivolo.

Naturalmente, cambiando i valori dei parametri basici si ottengono nuovi valori delle grandezze del velivolo in progetto.

In questo procedimento un elemento importante è rappresentato dai rendimenti del sistema motopropulsore «installato» per le condizioni di volo considerate.

Va notato che, mentre nei propulsori ad elica si ha una distinzione inetta e precisa tra motore e propulsore, nei motori a reazione tale distinzione non si può fare a priori perché il gruppo motopropulsore non è scindibile fisicamente nei due elementi indipendenti di motore e propulsore.

Per questa ragione nel caso dei motopropulsori ad elica la prestazione di riferimento è la potenza del motore misurata sull'albero dell'elica Π e ad essa vengono riferiti il peso, il consumo e l'ingombro del motore nel caso dei reattori, invece, ove esiste una certa incertezza per l'individuazione della potenza utile ai fini della propulsione, la prestazione di riferimento è la spinta.

Nel caso di moto- e turbo-eliche il rendimento termico del motore può essere espresso in funzione del consumo specifico di carburante riferito alla potenza Π sull'albero ed è indipendente da V_0

$$\eta_m = \frac{0{,}27 \times 10^6}{c_s p_c J}$$

Il rendimento propulsivo si identifica con quello dell'elica

$$\eta_p = \eta_e$$

Il rendimento globale è

$$\eta_g = \frac{0{,}27 \times 10^6}{c_s p_c J}\, \eta_e$$

Il suo andamento è, quindi, condizionato all'andamento di η_e.

Nel caso di turbogetti come rendimento termico si usa assumere il rapporto tra la variazione di energia cinetica subita nell'unità di tempo dall'unità di peso di aria nel moto relativo rispetto al motore e l'energia fornita a detta aria dal carburante nello stesso intervallo

$$\eta_m = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{g}(V_2^2 - V_0^2)}{\mu p_c J} = \frac{1}{2}\,\frac{(V_2 - V_0)(V_2 + V_0)}{g\mu p_c J} = 1800\,\frac{V_2 + V_0}{C_s^* p_c J}$$

In quanto ad η_p esso rappresenta il rapporto tra il lavoro fatto nell'unità di tempo dalla resistenza incontrata dal fluido nel moto relativo rispetto al motore e la variazione di energia cinetica del fluido nello stesso intervallo di tempo

$$\eta_p = \frac{(V_2 - V_0)V_0}{\frac{1}{2}(V_2^2 - V_0^2)} = \frac{2V_0}{V_2 + V_0} = \frac{1}{1 + \frac{V_2 - V_0}{2V_0}}$$

e, quindi,

$$\eta_g = \eta_m \times \eta_p = 3600\,\frac{V_0}{C_s^* p_c J}$$

Ricordando che

$$T = \frac{Q_a}{g}(V_2 - V_0)$$

si può scrivere in una forma più aderente al nostro scopo (v. tabella)

$$\eta_m = 3600\left(1 + \frac{Tg}{2Q_a V_0}\right)\frac{V_0}{C_s^* p_c J}$$

$$\eta_p = \frac{1}{1 + \frac{Tg}{2Q_a V_0}}$$

$$\eta_g = 3600\,\frac{V_0}{C_s^* p_c J}$$

TABELLA. — *Espressioni dei rendimenti dei propulsori isolati e dei sistemi motopropulsore-velivolo.*

	Fattori di integrazione	η_m	η_p	$\eta_g = \eta_m \times \eta_p$
Motore e turbo-eliche isolati	$f_e = f_i = 1$	$\frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s P_c J}$	η_e	$\frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s P_c J} \eta_e$
Sistemi moto-e turbo-elica velivolo	$f_e = \frac{\chi}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}}$ $f_i = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}}$	$\frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s \left(1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}\right) P_c J} =$ $= \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s P_c J} \times f_i$	$\eta_e \frac{\chi}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} =$ $= \eta_e \times f_e$	$\frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s \left(1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}\right) P_c J} \eta_e \frac{\chi}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} =$ $= \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s P_c J} \times \eta_e \times f_i \times f_e$
Turboreattore	$f_e^* = f_i^* = 1$	$1800 \frac{V_2 + V_0}{C_s^* P_c J}$ $3600 \left(1 + \frac{Tg}{2 Q_a V_0}\right) \frac{a}{C_s^* P_c J} M$	$\frac{1}{1 + \frac{V_2 - V_0}{2 V_0}}$ $\frac{1}{1 + \frac{Tg}{2 Q_a V_0}}$	$3600 \frac{a}{C_s^* P_c J} M$
Sistemi turbogetto-velivolo	$f_e^* = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}}$ $f_i^* = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}}$	$3600 \left(1 + \frac{T_s g}{2 Q_a V_0}\right) \frac{a}{C_s^* \left(1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}\right) P_c J} M =$ $= 3600 \left(1 + \frac{T_s g}{2 Q_a V_0}\right) \times \frac{a}{C_s^* P_c J} \times M \times f_i^*$	$\frac{1}{1 + \frac{T_s g}{2 Q_a V_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} =$ $= \frac{1}{1 + \frac{T_s g}{2 Q_a V_0}} \times f_e^*$	$3600 \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} \times \frac{a}{C_s^* \left(1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}\right) P_c J} M =$ $= 3600 \times \frac{a}{C_s^* P_c J} \times M \times f_i^* \times f_e^*$

Come si vede, il parametro $\frac{Tg}{Q_a V_0}$, rapporto tra spinta e resistenza della quantità di moto relativa alla condizione di volo considerata, compare solo nelle espressioni di η_m e di η_p e non in quella di η_g.

Il suo valore oltre che dalla condizione di volo e, quindi, dal regime del motore e dalla velocità V_0 è influenzato dal tipo di turboreattore adottato.

Alla velocità di crociera nei velivoli civili subsonici esso ha un valore compreso tra 0,8 e 0,9; il suo valore dovrà essere precisato nel corso dello sviluppo del progetto.

Tutte queste espressioni sono basate sulle prestazioni dei motori solati in condizioni standard al banco come sono fornite dalle Ditte costruttrici.

Quando i motori sono installati nei velivoli le loro prestazioni (spinta conferita al velivolo e potenza sull'albero dell'elica) e parità di condizioni ambientali e di funzionamento subiscono delle riduzioni. Infatti, in tutti i motori si hanno prelievi di potenza per i servizi di bordo (dinamo, pompe, compressori ausiliari, ecc.) e nei turboreattori si hanno anche prelievi di aria e perdite all'imbocco nei condotti di immissione d'aria e di scarico dei gas.

Oltre a queste perdite di spinta e di potenza che riguardano il funzionamento del motore, si ha una interferenza aerodinamica tra motore installato e velivolo che induce un aumento delle resistenze del velivolo rispetto a quelle del velivolo isolato.

Nei velivoli ad elica le interferenze aerodinamiche tra velivolo e motopropulsore provocano un aumento della resistenza aerodinamica del velivolo dovuto alla scia dell'elica e ad una riduzione del rendimento dell'elica per induzione aerodinamica sulle pale dovuta alla gondola od alla prua della fusoliera, al mozzo, ecc.

Nei velivoli a turbogetto si hanno aumenti di resistenza soprattutto sulle pareti in vicinanza delle prese d'aria e perdite di spinta all'imbocco delle prese d'aria e nei condotti di immissione e di scarico i quali dovendo essere adattati alla disposizione d'insieme del velivolo hanno le forme più disparate.

Così, ad esempio, se il motore è completamente immerso nella fusoliera e le prese d'aria sono laterali vicine alle pareti della fusoliera l'aria perde una parte della sua energia.

Se le prese d'aria sono alla radice dell'ala distanti dalle pareti della fusoliera sono necessari condotti curvi con conseguenti perdite nei condotti.

Per contro nei motori installati nelle gondole le perdite di imbocco sono più grandi e quelle interne sono più ridotte rispetto ai motori installati in fusoliera (v. fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*).

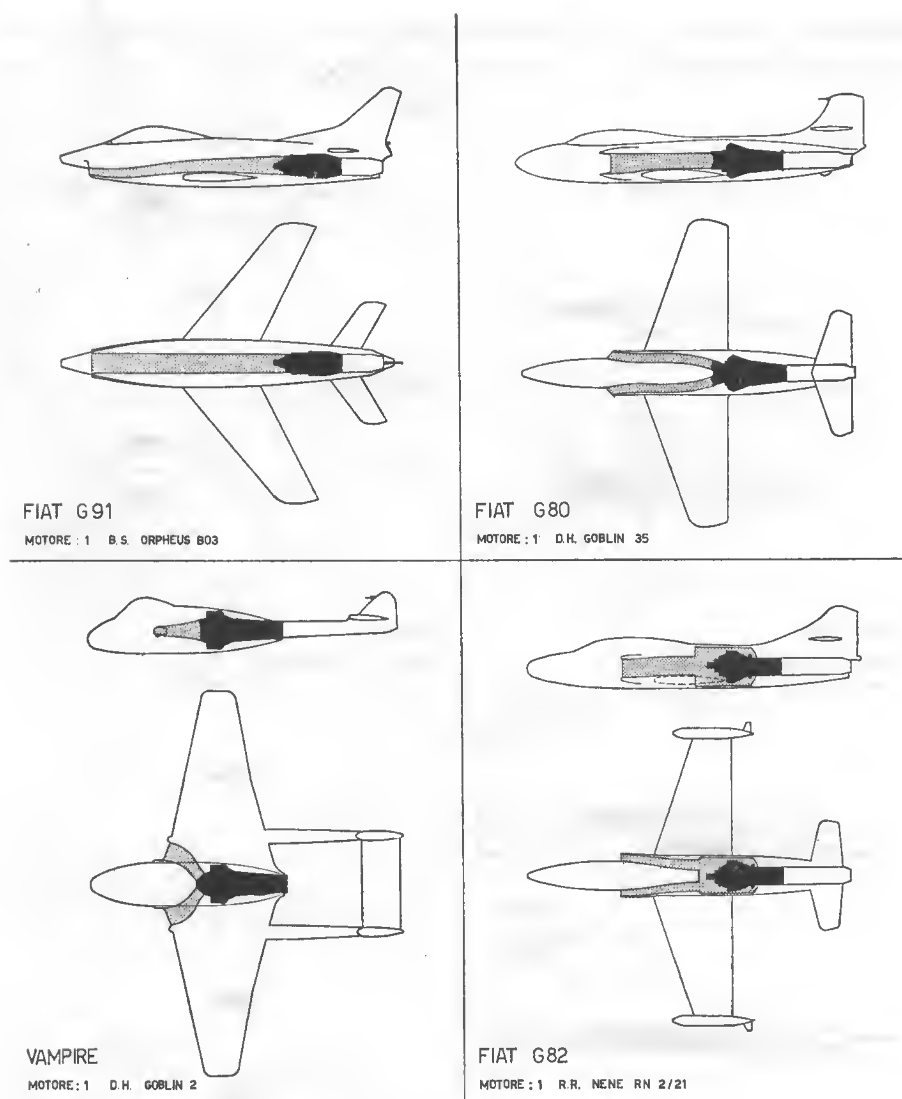


Fig. 1*a* – Schemi dei sistemi velivolo-turbogetti monomotori.

Come si vede la valutazione dei rendimenti dei sistemi motopropulsori integrati nei velivoli è molto diversa a seconda che si tratti di motopropulsori ad elica od a getto e richiede in ogni caso un esame analitico e l'applicazione di formule semiempiriche basate sulla conoscenza di parametri che sovente non sono disponibili nella fase di progetto preliminare del velivolo.

Per questa ragione riteniamo che sia conveniente riferire i rendimenti al complesso integrato velivolo-motopropulsore e procedere alla loro valu-

tazione per tentativi e successive approssimazioni. A questo scopo assumiamo due parametri che rappresentano rispettivamente le perdite interne

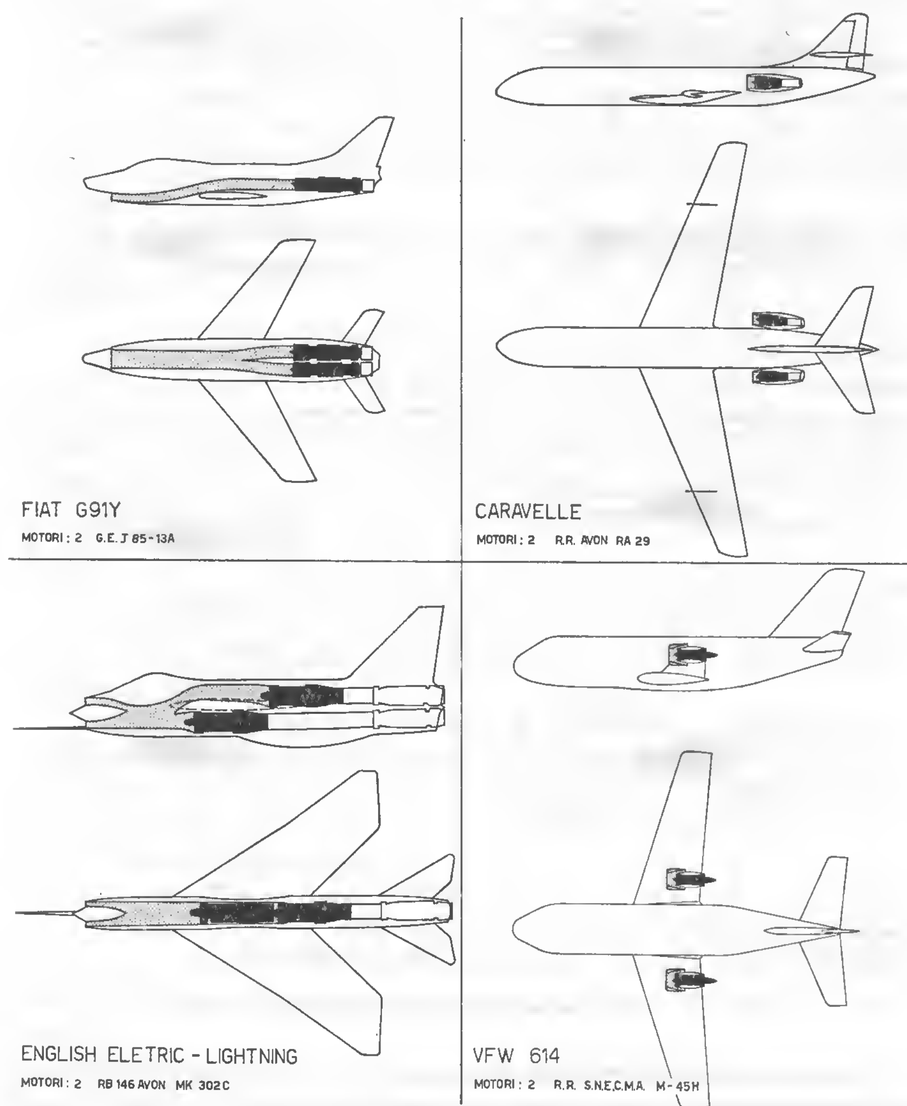


Fig. 1b – Schemi dei sistemi velivolo-turbogetti bimotori.

e quelle esterne ai quali vengono attribuiti empiricamente in base a dati su velivoli similari, valori approssimati che vanno verificati apportandovi le necessarie correzioni, nel corso dello sviluppo del progetto.

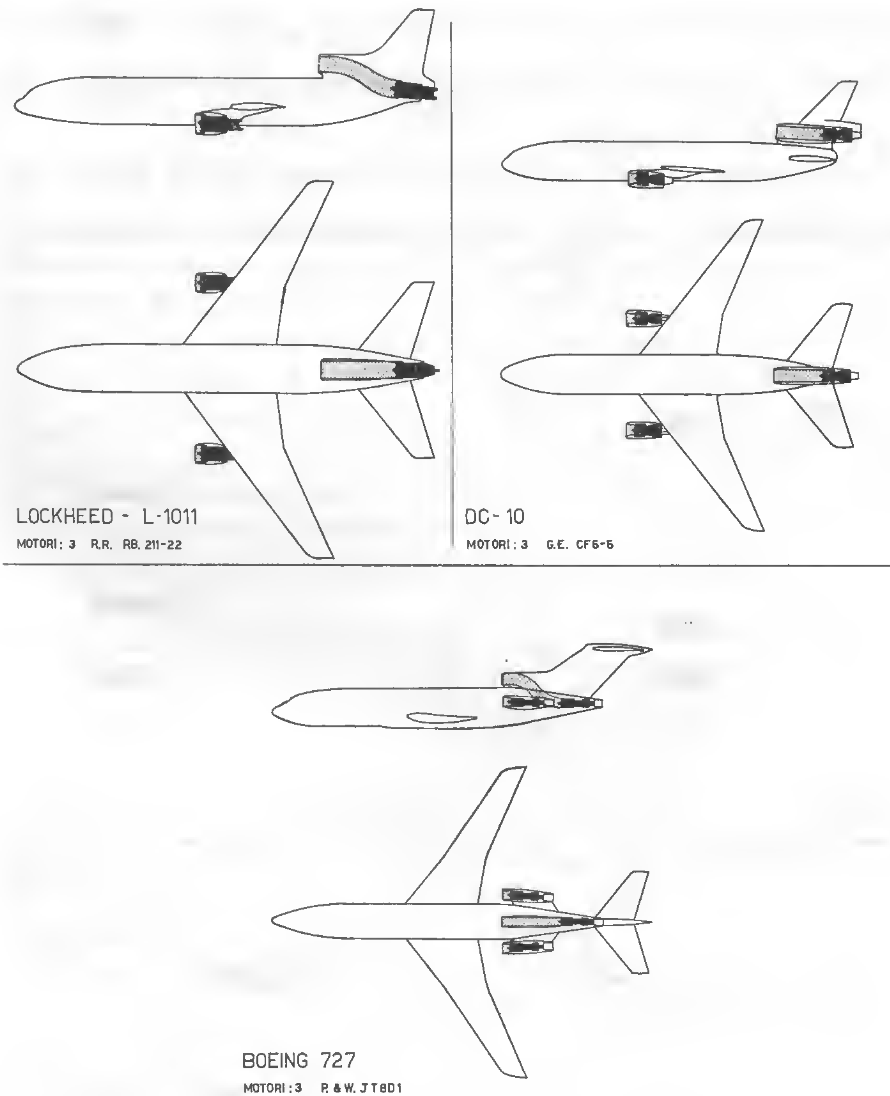


Fig. 1c – Schemi dei sistemi velivolo-turbogetti trimotori.

Consideriamo l'insieme velivolo-turbogetto integrato come un sistema nel quale il motore sviluppa la spinta

$$T_s = \frac{1}{2} C_D \left(1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}\right) \varrho_0 \delta S V_0^2$$

che uguaglia, nelle condizioni di volo orizzontale uniforme in esame, la

somma della resistenza del velivolo isolato $\frac{1}{2} C_D \varrho_0 \delta S V_0^2$ e l'aumento di resistenza $\frac{1}{2} \Delta C_D \varrho_0 \delta S V_0^2$ dovuto agli effetti esterni dell'integrazione del motopropulsore nel velivolo.

Ciò equivale a dire che il sistema velivolo-turbogetto produce una spinta propulsiva $T \dfrac{1}{1 + \dfrac{\Delta C_D}{C_D}}$ ed ha conseguentemente un rendimento

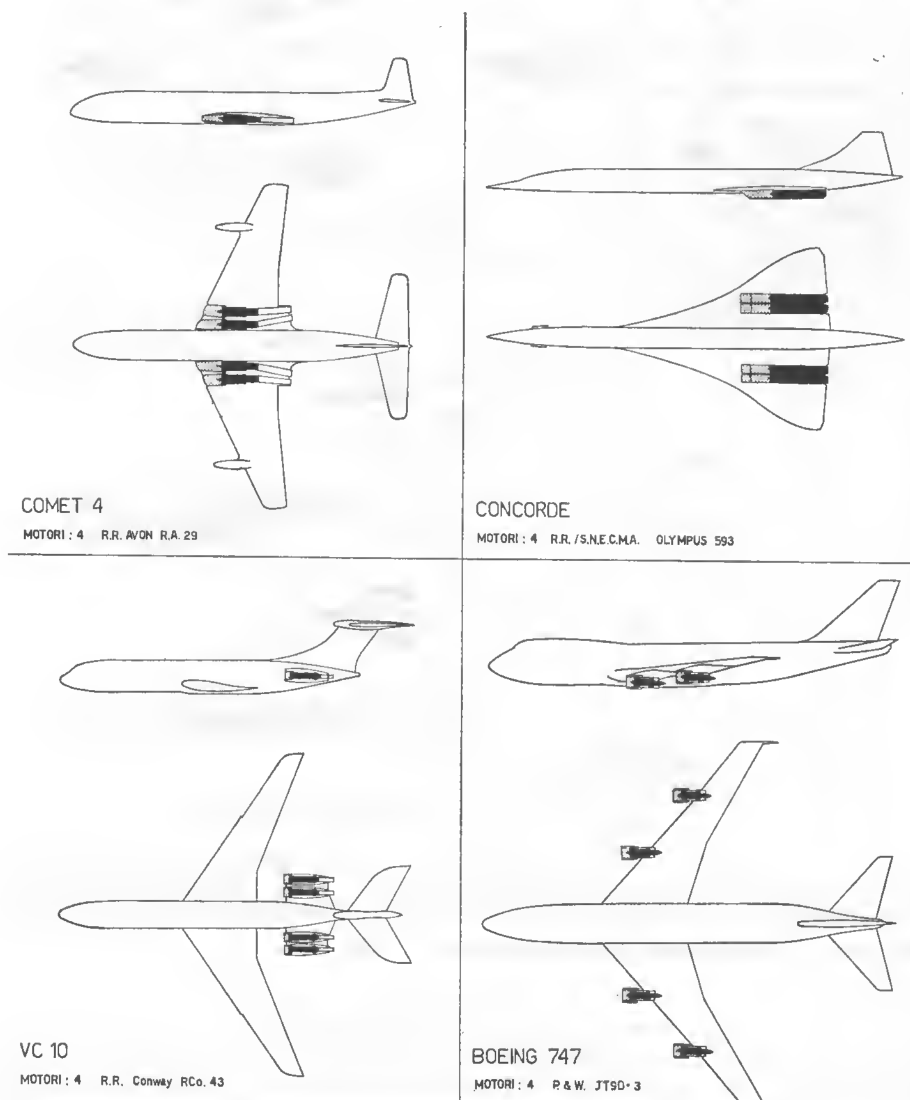


Fig. 1*d* – Schemi dei sistemi velivolo-turbogetti quadrimotori.

propulsivo

$$\eta_p = \frac{TV_0}{\frac{Q_a}{g}(V_2^2 - V_0^2)} \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} = \frac{1}{1 + \frac{T_s g}{2Q_a V_0}} \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} .$$

Analogamente per tenere conto delle perdite interne di spinta che riguardano il motore vero e proprio possiamo dire che il sistema velivolo-turbogetto ha un consumo specifico $C_s^* + \Delta C_s^*$

ove C_s^* è il consumo specifico di un motore isolato di spinta T nelle condizioni di giri quota e velocità di volo considerate;

ΔC_s^* è l'aumento di consumo specifico che corrisponde alle perdite di spinta dovute all'imbocco, ai condotti, alla uscita ed alle derivazioni di aria per i servizi e per la ventilazione e raffreddamento nel vano motore, ecc.

Con tali ipotesi i rendimenti del sistema sono i seguenti

$$\eta_m = 3600\left(1 + \frac{T_s g}{2Q_a V_0}\right) \frac{a}{C_s^*\left(1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}\right) p_c J} M$$

$$\eta_p = \frac{1}{1 + \frac{T_s g}{2Q_a V_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{\Delta C}{C_D}}$$

$$\eta_g = 3600 \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} \frac{a}{C_s^*\left(1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}\right) p_c J} M$$

Indicando con

$$f_i^* = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_s^*}{C_s^*}}$$ che chiamiamo fattore interno di integrazione

$$f_e^* = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}}$$ che chiamiamo fattore esterno di integrazione

si può scrivere

$$\eta_m = 3600\left(1 + \frac{T_s g}{2Q_a V_0}\right)\frac{a}{C_s^* p_c J} \times M f_i^* \qquad \text{(v. fig. 2)}$$

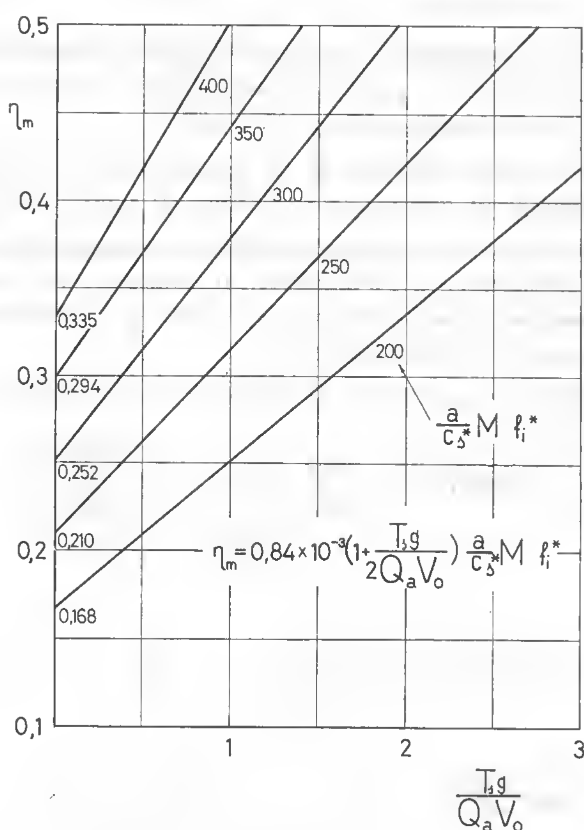


Fig. 2 – Sistemi velivolo-turbogetto. η_m in funzione di $\dfrac{T_s g}{Q_a V_0}$ per vari valori di $\dfrac{a}{C_s^*} M f_i^*$.

$$\eta_p = \frac{1}{1 + \dfrac{T^s g}{2Q_a V_0}} f_e^* \qquad \text{(v. fig. 3)}$$

$$\eta_g = 3600 \frac{a}{C_s^* p_c J} M \times f_i^* \times f_e^* \qquad \text{(v. fig. 4)}$$

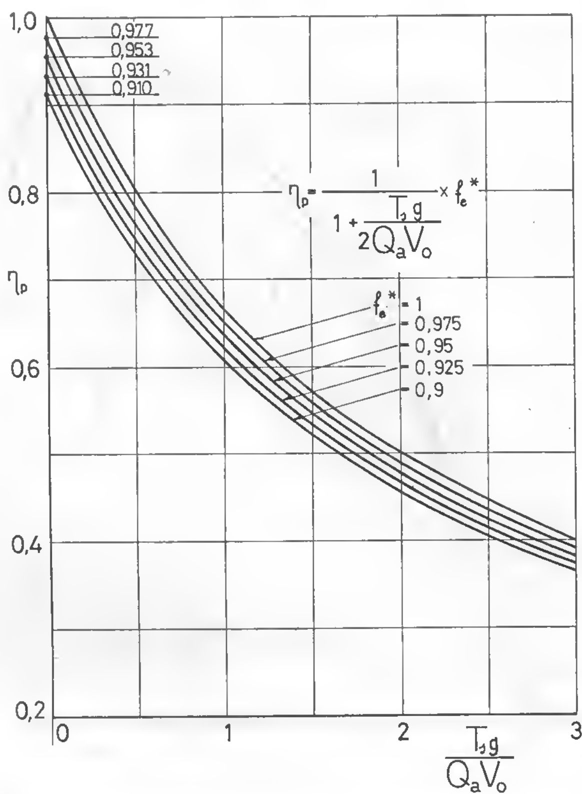


Fig. 3 – Sistemi velivolo-turbogetto. η_p in funzione di $\frac{T_s g}{Q_a V_o}$ per vari valori di f_e^*.

Nel caso di velivoli ad elica il rendimento termico del sistema può essere espresso analogamente

$$\eta_m = \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s\left(1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}\right) p_c J} = \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s p_c J} f_i$$

ove C_s è il consumo specifico del motore isolato nelle condizioni standard, riferito alla potenza π corrispondente alla condizione di volo considerata;

ΔC_s è l'incremento di detto consumo specifico che corrisponde alla derivazione di potenza per gli eventuali servizi;

$f_i = \frac{1}{1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}}$ è il fattore interno di integrazione.

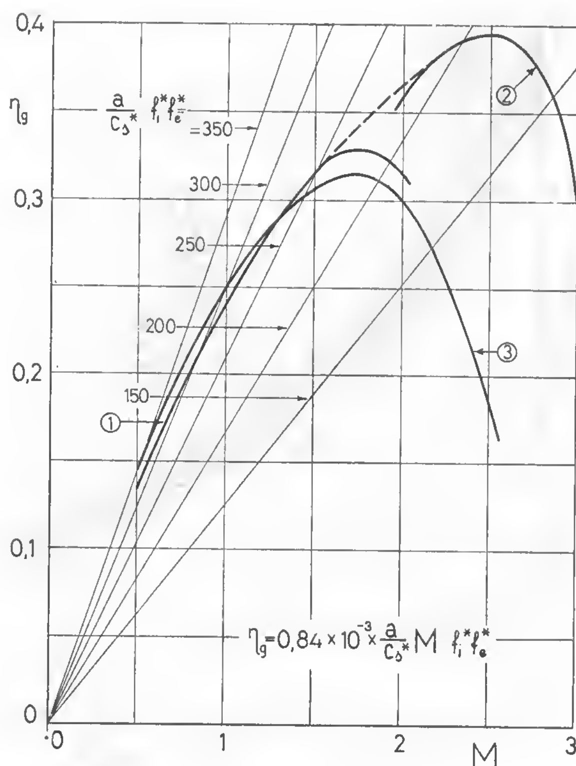


Fig. 4 – Sistemi velivolo-turbogetto. η_g in funzione di M per vari valori di $\frac{a}{C_s^*} f_i^* f_e^*$. Le curve ①, ② e ③ rappresentano secondo A. A. Lombard [7] l'inviluppo dei valori massimi di η_g relativo al motore installato:
① Getto semplice ad elevato rapporto di compressione;
② Getto semplice a basso rapporto di compressione;
③ Elevato rapporto di compressione con by-pass.

Tenendo presente che gli effetti esterni dell'integrazione in questo caso possono essere computati in parte come riduzione della spinta della elica ed in parte come aumento della resistenza del velivolo si può scrivere per ogni data condizione di volo orizzontale

$$75 \Pi_s \eta_e \chi = \frac{1}{2} C_D \left(1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}\right) \varrho_0 \delta S V_0^3$$

ove η_e è il rendimento dell'elica isolata nelle condizioni di funzionamento corrispondente alla velocità e quota di volo considerata. La figura riporta una curva inviluppo dei valori massimi di η_e in funzione del numero di Mach di volo (v. fig. 5);

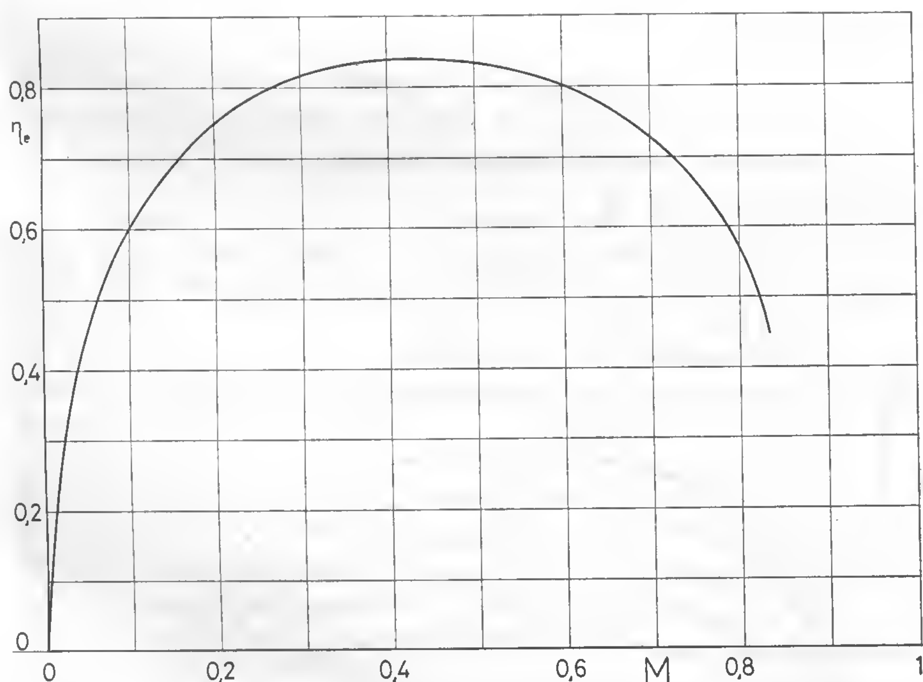


Fig. 5 – Elica isolata. Una curva inviluppo dei valori massimi di η_e in funzione di M.

χ è il fattore di riduzione del rendimento dell'elica dovuto agli effetti delle interferenze elica-gondola del motore o prua della fusoliera ed alle parti contigue del velivolo;

ΔC_D è l'aumento del coefficiente di resistenza rispetto a quello del velivolo (C_D) per il raffreddamento dei motori e dei radiatori, per l'incremento di resistenza delle superfici « bagnate » dalla scia dell'elica.

Il rendimento propulsivo del sistema sarà, quindi

$$\eta_p = \eta_e \frac{\chi}{1 + \dfrac{\Delta C_D}{C_D}} = \eta_e f_e$$

ove si è posto

$$f_e = \frac{\chi}{1 + \dfrac{\Delta C_D}{C_D}}$$ fattore di integrazione esterna del sistema

Si può scrivere, quindi

$$75 \Pi_s \eta_e f_e = \frac{1}{2} C_D \varrho_0 \delta S V_0^3$$

Il rendimento globale del sistema costituito dal moto- o turboelica e dal velivolo sarà (v. fig. 6)

$$\eta_g = \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s\left(1 + \frac{\Delta C_s}{C_s}\right) p_c J} \eta_e \frac{\chi}{1 + \frac{\Delta C_D}{C_D}} = \frac{0{,}27 \times 10^6}{C_s p_e J} \eta_e \times f_i \times f_e$$

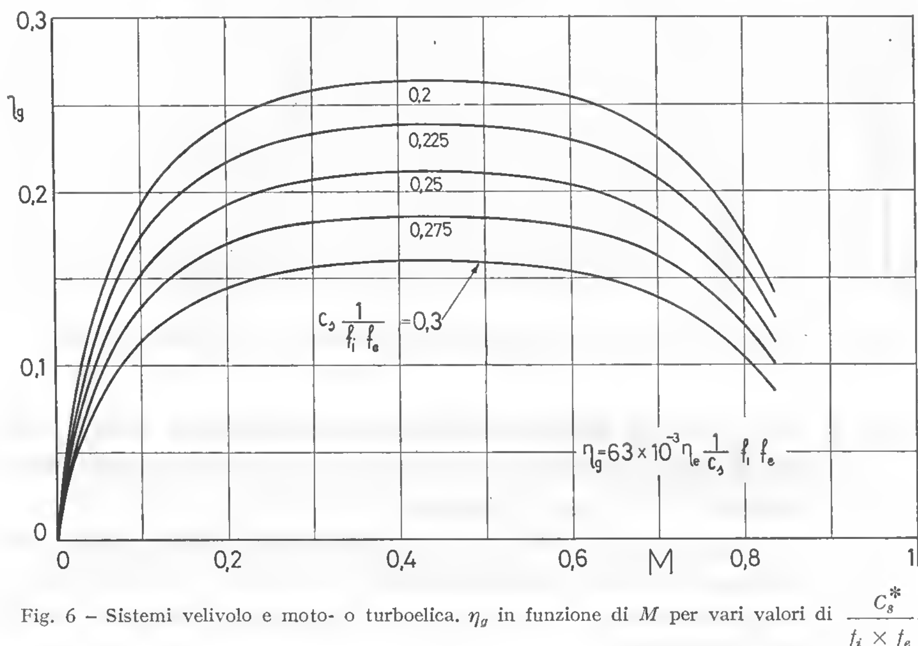


Fig. 6 – Sistemi velivolo e moto- o turboelica. η_g in funzione di M per vari valori di $\frac{C_s^*}{f_i \times f_e}$.

* * *

Il procedimento sopra illustrato è basato sul fatto di attribuire al sistema velivolo-motopropulsore un incremento del coefficiente di resistenza rispetto al velivolo isolato, una riduzione del rendimento dell'elica ed un incremento del consumo specifico rispetto al motore isolato di pari potenza.

I due fattori di integrazione che esprimono dette variazioni costituiscono parametri variabili del progetto ai quali vengono attribuiti inizialmente dei valori in base a dati empirici; essi debbono essere definiti in un processo di successive approssimazioni nel corso dello svolgimento del progetto.

Oltre a costituire un metodo pratico per avviare il progetto generale di massima di un velivolo questo procedimento ha il pregio di mettere direttamente in evidenza, mediante i fattori sopraddetti gli effetti dell'integrazione velivolo-motopropulsore rispettivamente sul consumo specifico di combustibile e sulla resistenza aerodinamica del velivolo e sull'interferenza elica-velivolo.

I prodotti $f_i \times f_e$ ed $f_i^* \times f_e^*$ possono essere assunti come indice di bontà della integrazione del motopropulsore nel velivolo ad elica od a getto rispettivamente in ogni condizione di volo orizzontale uniforme considerata.

Il valore di tale indice è minore di uno; nel caso ideale di interferenze esterne ed interne nulle raggiunge l'unità.
M. COMO - VP-18

BIBLIOGRAFIA

[1] K. D. Wood, *Technical Aerodynamics*, McGraw-Hill Book Co. (1947).

[2] C. F. Baker, *Is the Propeller here to Stay?*, Air World (Giugno 1948).

[3] A. W. Quick, *Etude de la forme des canaux d'admission pour turboreacteurs*, Interavia (Novembre 1949).

[4] G. B. Nicolò, *Aerodinamica applicata al volo*, A.C.A., Roma (1950).

[5] G. Gabrielli, *Un metodo per la determinazione della superficie alare e del suo allungamento nel progetto dei velivoli*, «Atti Accademia delle Scienze di Torino», vol. 86 (1951-52).

[6] D. Küchemann-J. Weber, *Aerodynamics of Propulsion*, McGraw-Hill Book Co. (1953).

[7] A. A. Lombard, *Low Consumption Turbine Engines*, 5th International Aeronautical Conference, Los Angeles (Giugno 1955).

[8] C. R. Liebermann-C. E. Tilyou, *The Unity Equation and Growth Factor*, S.A.W.E., Los Angeles (1960).

[9] G. L. Dawson, *Engines for Advanced Subsonics Transports*, Flight International (Gennaio 1965).

[10] A. Capetti, *Motori termici*, UTET, Torino (1967).

[11] G. Maoli, *Controllo a terra dell'accoppiamento velivolo-motore del caccia bombardiere FIAT G 91 Y*, «Atti e Rassegna Tecnica degli Ingegneri e degli Architetti di Torino» (Novembre 1968).

[12] A.G.A.R.D., *A.G.A.R.D. Conference Proceedings on Airframe/Propulsion Interference* (1975).

[13] G. Gabrielli, *Lezioni sulla Scienza del Progetto degli Aeromobili*, vol. II, cap. IX, Ed. Levrotto & Bella, Torino (ristampa 1975).

L. G. NAPOLITANO (*)

The functional inverse approach for the variational formulation of boundary value problems.

Riassunto. — *Si veda l'Introduzione.*

1. — INTRODUCTION.

The present author has developed a functional approach for the unified derivation of hybrid and/or classical variational formulations of boundary value problems [1], [2], [3], [4].

This approach, referred to as the " direct approach ", considers as given a formally self-adjoint linear boundary value problem and derives its different variational formulations from the stationary properties of a twofield functional defined over two suitably defined linear varieties. The direct approach hinges on an assumed factorization of the differential operator defining the boundary value problem and, ultimately, on the corresponding Gauss formula.

A more powerful and general approach, to be referred to as " inverse approach ", will be presented here.

In dealing with a general variational theory of boundary value problems Lions and Magenes [5] have already pointed out the connection existing, via an underlying Gauss formula, between the classes of problems that can be analysed and the assumed definition of an inner product.

The contention here is that, ultimately and more generally, the connection is to be established between an abstract Gauss formula and classes of boundary value problems. The inverse approach both accomplishes these tasks and duely exploits its results.

The starting point is an abstract Gauss formula and the end results are variational formulations (derived by the method developed in the direct approach) of the classes of boundary value problems that can be " associated " to the given Gauss formula.

As it will be shown, an abstract Gauss formula involves essentially two Hilbert spaces of elements v and τ defined over a domain Ω, a diffe-

(*) University of Naples.

rential operator G such that $\{ Gv \}$ is a subset of $\{ \tau \}$, a number of boundary spaces defined over partitions of the boundary of Ω and a set of principal and boundary operators. The " degrees of freedom " it affords thus pertain not only to the choice of the definition of inner products but also to the very same choices of the elements v, τ, of the operator G and of their tensorial orders.

The power and generality of the inverse approach stems from the unified derivation of variational formulations for the wide classes of boundary value problems resulting from such diversified choices.

The inverse approach presented in this paper is a natural outcome of the direct approach previously developed by the author. It thus makes uses of many results already established in previous works to which reference is made for greater details and/or for pertinent discussion of the significance of the main assumption which underlies its development.

2. — Fundamentals of the inverse approach.

2.1 — *The abstract Gauss formula.*

Let Ω be an open bounded subset of R^n with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ and let $\partial_{p_j}\Omega$, $\partial_{n_j}\Omega$ $(1 \leq j \leq m)$ be $(m > 1)$ arbitrary partitions, not necessarily all distinct, of $\partial\Omega$.

Let $V(\Omega) \subset K(\Omega)$ be two appropriate subsets of the real Hilbert space $L^2(\Omega)$, where the real function $v \in V$ can be of any tensorial order, and G be a differential operator of order m and arbitrary tensorial order. Assume that there is a Gauss's formula of the type:

$$\langle Gv, \tau \rangle = (v, G^*\tau) - \sum_{j=1}^{m} l_j(P_j v, N_j \tau) \tag{2.1}$$

where $Gv, \tau \in U_1(\Omega)$ a subset of the $L^2(\Omega)$ space appropriate to their common tensorial order; $\langle\ ,\ \rangle$ and $(\ ,\ )$ denote inner products in U_1 and V, respectively, G^* is the formal adjoint of G and the l_j's are bilinear symmetrical forms on $\partial\Omega$ which characterize the set of (m) " principal " (resp. " natural ") boundary differential operators P_j (resp. N_j) of order $(j-1)$ [resp. $m-j$].

The conditions on $\partial\Omega$ and its partitions necessary for the (formal) validity of the Gauss formula are assumed to hold [5].

The nature of the elements v and τ (and thus of the operator G) and the inner products $\langle\ ,\ \rangle$ and $(\ ,\ )$ [and thus the sets of boundary differential operators] are left " unspecified ".

Denote by l_{p_j} and l_{n_j} the restrictions of l_j to $\partial_{p_j}\Omega$ and $\partial_{n_j}\Omega$, respectively, and let:

$$p_j = P_j v \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} ; \qquad n_j = N_j G v \Big|_{\partial_{n_j}\Omega}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_{p_j}(P_j v, N_j \tau) = \sum_{j=1}^{m} l_{p_j}(p_j, N_j \tau) = l_p(p, N\tau)$$

$$\sum_{j=1}^{m} l_{n_j}(P_j v, N_j \tau) = \sum_{j=1}^{m} l_{n_j}(P_j v, n_j) = l_n(Pv, n)$$

where:

$$p = [p_1, p_2, \ldots, p_m]; \quad n = [n_1, n_2, \ldots, n_m]$$

Then the Gauss formula (2.1) can be rewritten as:

$$\langle Gv, \tau \rangle = (v, G^*\tau) - l_p(p, N\tau) - l_n(Pv, n) \tag{2.2}$$

The thus fas arbitrary element $\tau \in U_1(\Omega)$ is now restricted to the subset defined by

$$\begin{aligned} U_2 &= \{ \tau \in U_1(\Omega)/\tau = Gv + \sigma \; ; \; \sigma \in \Sigma \} \\ \Sigma &= \{ \sigma \in U_1(\Omega)/G^*\sigma = 0, N\sigma \Big|_{\partial\Omega} = 0 \} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Gv and σ will be referred to, respectively, as the compatible (or constitutive) and non-compatible parts of τ.

The subset $\Sigma \subset U_1(\Omega)$, supposed non-empty (see [4] for relevant examples) is orthogonal to the subset $\{ Gv \}$, orthogonality being understood with respect to the inner product $\langle \, , \rangle$.

On account of this, for $\tau, \tau' \in U_2$ the Gauss formula (2.2) yields, with $G^*Gv = s \in K'(\Omega)$, the dual of $K(\Omega)$:

$$\langle \tau, \tau' \rangle = \langle \sigma, \sigma' \rangle + (v', s) - l_p(p', N\tau) - l_n(Pv', n) \tag{2.4}$$

In principle, the inner product $\langle \sigma, \sigma' \rangle$ could be further decomposed, by relating it to the inner product pertaining to still another space and to other bilinear forms. This development is not to be pursued here.

It will only be supposed that there is an element r, belonging to the cartesian product space $M_r \subset L^2(\Omega) \otimes L^2(\partial\Omega)$, appropriate to the tensorial order of σ, which determines $\sigma \in \Sigma$ via a pertinent boundary value problem.

The elements s, p, n and r will be interpreted as " generalized " constraints imposed on the element τ of U_2 and it will be assumed that a given set of values for the generalized constraints characterizes a unique element $\tau \in U_2(\Omega)$ as formalized in the next paragraphs.

2.2 — *Constraint and solutions spaces.*

Define:

$$c = [s, p, n, r] \tag{2.5}$$

as a " constraint element ". Its components will be referred to, respectively, as source, principal boundary, natural boundary and constitutive (or compatibility) constraints. Thus they prescribe, in the order, the source (s) in Ω of an element τ, its (m) principal boundary values p_j $(1 \leq j \leq m)$ on the (m) non necessarily coincident subsets $\partial p_j \Omega$ of $\partial\Omega$; its (m) natural boundary values n_j on the (m) complementary subsets $\partial n_j \Omega$, and, finally, the value (r) characterizing its " non-compatible " part σ.

It is assumed that there exist suitable spaces D_s, B_p, B_n and M_r, closed with respect to appropriate norms, such that if

$$\mathcal{C} = D_s \otimes B_p \otimes B_n \otimes M_r$$

then for any $c \in \mathcal{C}$ (i.e. any $s \in D_s$, $p \in B_p$, $n \in B_n$, $r \in M_r$) the linear mapping $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow U_2(\Omega)$ is one to one, continuous and bounded [3], [4].

The space $\mathcal{C}$ will be called the constraint space and its (closed) F-image $H = F(\mathcal{C}) \subset U_2(\Omega)$ will be called the " solution space ". F is an isomorphism between the constraint space $\mathcal{C}$ and the solution space H.

The hypothesis on F is related to the existence and uniqueness of the solution of the following four linear boundary value problems:

$$\begin{array}{lll}
1) & \left.\begin{array}{l} G^*Gv = s \\ Pv\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow Sv = s & \\
2) & \left.\begin{array}{l} G^*Gv = 0 \\ P_jv\Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = p_j \\ N_jGv\Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow L_pv = p & (1 \leq j \leq m) \\
3) & \left.\begin{array}{l} G^*Gv = 0 \\ P_jv\Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = 0 \\ N_jGv\Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = n_j \end{array}\right\} \Longrightarrow L_nv = n & (1 \leq j \leq m) \\
4) & \left.\begin{array}{l} R\sigma = r_1 \\ B\sigma\Big|_{\partial\Omega} = r_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow R\sigma = r & r = [r_1, r_2]
\end{array} \tag{2.6}$$

the operators S, L_p, L_n, R being appropriate restrictions of F^{-1}. The fourth boundary value problem involves the differential operators R (in Ω), of

order m, and B (on $\partial\Omega$) which are left unspecified since they depend on the unspecified nature of τ and G. Notice, furthermore, that upon (2.3):

$$G^*\tau = G^*\sigma$$

whereas, in general (see [4]) $R\sigma \neq R\tau$ since RG is not necessarily the null operator.

The ranges of the above defined operators are the following subsets of the constraint space:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(S) &= \{ c_s = [s, 0, n(s), 0] \} = C_s \subset \mathcal{C} \\ \mathcal{R}(L_p) &= \{ c_p = [0, p, 0, 0] \} = C_p \subset \mathcal{C} \\ \mathcal{R}(L_n) &= \{ c_n = [0, 0, n, 0] \} = C_n \subset \mathcal{C} \\ \mathcal{R}(R) &= \{ c_r = [0, 0, 0, r] \} = C_r \subset \mathcal{C} \end{aligned} \tag{2.7}$$

where $\{ c \}$ denotes the set generated by c. The notation $n(s)$ is meant to indicate that for problem (1) the values of $N_j Gv$ on $\partial n_j \Omega$ are uniquely determined once s is given.

The corresponding domains are (closed) subspaces of the solution space referred to as basic subspaces and denoted by:

$$X_s = F(C_s);\ X_p = F(C_p);\ X_n = F(C_n);\ X_r = F(C_r) \tag{2.8}$$

The isomorphism F makes it possible to define a pseudo-dimensionality (psd) for subspaces of H as the number of constraints (i.e. number of components of the constraint element) which can be given, independently, arbitrary values. Thus psd $H = 4$, any of the basic subspaces has psd $= 1$ and any fixed element $\bar{\tau} \in H$ has psd $= 0$ [2].

The solution space H has the direct sum decomposition:

$$H = X_s \oplus X_p \oplus X_n \oplus X_r$$

the basic subspaces being mutually orthogonal.

Given the property of H, the only thing which needs to be proven is the orthogonality of the basic subspaces. This follows readily from the definitions (2.7, 2.8) of the subspaces and from the Gauss formula (2.4) rewritten as to exhibit explicitely the components of the constraint element (2.5):

$$\langle \tau, \tau' \rangle = \langle Fr, Fr' \rangle + \begin{cases} (v, s') - l_p(p, N\tau') - l_n(Pv, n') \\ (v', s) - l_p(p', N\tau) - l_n(Pv', n) \end{cases} \tag{2.9}$$

when accounting for the fact that $Fr = 0 \Longleftrightarrow r = 0$.

The inner product among elements of each one of the four basic subspaces reduces to only one of the four contributions contained in the Gauss

formula. Thus, alternatively and equivalently, the basic subspaces could have been introduced directly by imposing such a requirement of the Gauss'formula.

2.3 — *The associated boundary value problem for compatible elements.*

The general set up established in the previous paragraphs leads to *a*) the definition of a boundary value problems for compatible elements, associated with the given Gauss'formula; *b*) the possibility of deducing classes of variational formulations of this boundary value problem.

By definition, a compatible element $\bar{\tau} = F\bar{c}$ is uniquely characterized by a constraint element $\bar{c}$ of the type:

$$\bar{c} = [\bar{s}, \bar{p}, \bar{n}, 0] \tag{2.10}$$

The element $\bar{\tau}$ can thus be interpreted as the (generalized) solution of the following boundary value problem:

$$\begin{aligned} &G^*G\bar{v} = \bar{s} \\ &P_j\bar{v}\Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = \bar{p}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \\ &N_jG\bar{v}\Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = \bar{n}_j \end{aligned} \tag{2.11}$$

The element $\bar{\tau}$ of the vector space H will be referred to as the solution vector and the values $\bar{s}, \bar{p}, \bar{n}$ of the source, principal and natural boundary constraints will be referred to as the constraints " of " the solution vector $\bar{\tau}$.

2.4 — *Linear varieties and two-field variational functional.*

Let $\mathcal{Y}_\alpha$, $\mathcal{Y}_\beta$ be two arbitrary closed subspaces of H; $\bar{\mathcal{Y}}_\alpha$, $\bar{\mathcal{Y}}_\beta$ their orthogonal complements and $\mathcal{T}_\alpha$, $\mathcal{T}_\beta$, $\bar{\mathcal{T}}_\alpha$, $\bar{\mathcal{T}}_\beta$ the corresponding projection operators (e.g. $\mathcal{Y}_\alpha = \mathcal{T}_\alpha H$; $\bar{\mathcal{Y}}_\alpha = \bar{\mathcal{T}}_\alpha H$).

Denote by $\mathcal{V}_\alpha$, $\mathcal{V}_\beta$ the linear varieties obtained by translating $\mathcal{Y}_\alpha$ and $\mathcal{Y}_\beta$ by $\bar{\tau}$:

$$\mathcal{V}_\alpha = \{ \tau_\alpha \in H / \tau_\alpha = \bar{\tau} + y_\alpha ;\ y_\alpha \in \mathcal{Y}_\alpha \}$$

$$\mathcal{V}_\beta = \{ \tau_\beta \in H / \tau_\beta = \bar{\tau} + y_\beta ;\ y_\beta \in \mathcal{Y}_\beta \}$$

Since $\bar{\mathcal{T}}_\alpha \mathcal{V}_\alpha = \bar{\mathcal{T}}_\alpha \bar{\tau}$ the projection on $\bar{\mathcal{Y}}_\alpha$ of any element $\tau_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ satisfies the same constraints as the corresponding projection of the solution vector $\bar{\tau}$. Similarly for the elements $\tau_\beta \in \mathcal{V}_\beta$. The elements of the varieties can thus be loosely characterized as satisfying a certain set (in particular null if $\mathcal{V} = H$) of constraints of the solution [2], [4].

Define the two-field variational functional:

$$\begin{cases} 2K(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \langle \tau_\alpha - \tau_\beta \rangle^2 - \langle \bar{\tau} - \tau_\beta \rangle^2 + \langle \bar{\tau} \rangle^2 = \\ \quad = \langle \tau_\alpha \rangle^2 - 2 \langle \tau_\alpha - \bar{\tau}, \tau_\beta \rangle \quad (\tau_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha \; ; \; \tau_\beta \in \mathcal{V}_\beta) \end{cases} \tag{2:12}$$

As proven in [3] this functional attains a stationary value for $\tau_\alpha = \bar{\tau}_\alpha$ and $\tau_\beta = \bar{\tau}_\beta$ such that:

$$\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau} \; ; \quad \bar{\tau}_\beta \in \mathcal{V}_\gamma = \bar{\tau} + \mathcal{Y}_\alpha \cap \mathcal{Y}_\beta \tag{2.13}$$

This functional will be used to obtain, via the Gauss formula, different classes of variational problems equivalent to the boundary value problem (2.11).

3. — Variational functionals.

The Gauss formula (2.9) is used to express the two-field variational functional (2.12) in terms of the components of the constraint vector c.

By recalling that $\bar{\tau} = G\bar{v} = F[\bar{s}, \bar{p}, \bar{n}, 0]$ and by letting:

$$\tau_\alpha = Gv_\alpha + \sigma_\alpha = Fc_\alpha = F[s_\alpha, p_\alpha, n_\alpha, r_\alpha]$$

with a similar notation for τ_β, it is readily shown that:

$$K(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \frac{1}{2} \langle \tau_\alpha \rangle^2 - \langle \tau_\beta, \tau_\alpha \rangle +$$

$$+ \begin{cases} (v_\alpha, \bar{s}) - \underline{l_p(p_\beta, N\bar{\tau})} - l_n(Pv_\beta, \bar{n}) & (3.1) \\ \underline{(\bar{v}, s_\beta)} - l_p(\bar{p}, N\tau_\beta) - \underline{l_n(P\bar{v}, n_\beta)} & (3.2) \end{cases}$$

and, by further developing $\langle \tau_\beta, \tau_\alpha \rangle$:

$$K(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \frac{1}{2} \langle \tau_\alpha \rangle^2 - \langle \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle +$$

$$+ \begin{cases} (v_\beta, \bar{s} - s_\alpha) - \underline{l_p[p_\beta, N(\bar{\tau} - \tau_\alpha)]} - l_n[Pv_\beta, \bar{n} - n_\alpha] & (3.3) \\ \underline{(\bar{v} - v_\alpha, s_\beta)} - l_p[\bar{p} - p_\alpha, N\tau_\beta] - \underline{l_n[P(\bar{v} - v_\alpha), n_\beta]} & (3.4) \end{cases}$$

Each one of the above four expressions leads to possible forms of one or two-field variational functionals which include, as it will be seen shortly, the classical primal and dual one field functionals. In each case there is a minimum number of requirements to be imposed on the varieties $\mathcal{V}_\alpha$ and $\mathcal{V}_\beta$ in order to eliminate, as obviously needed, the terms containing unknown quantities related to the solution element [i.e. quantities other than the components of the given constraint element $\bar{c}$]. Such terms, underlined in equations (3.1) ÷ (3.4) can be eliminated only by acting on the component of the constraint elements c_α and c_β defining the linear varieties.

Since $\mathcal{V}_\alpha$ and $\mathcal{V}_\beta$ are subspaces translated by $\bar{\tau}$, the components of c_α and/or c_β to be acted upon must be set equal to the corresponding components of $\bar{c}$. This automatically identifies also the subspaces $\mathcal{Y}_\alpha$, $\mathcal{Y}_\beta$ and, upon equation (2.13), the variety $\mathcal{V}_\gamma$ characterizing the eventual arbitrariness in $\bar{\tau}_\beta$. Other requirements can obviously be added to further restrict the varieties $\mathcal{V}_\alpha$ and $\mathcal{V}_\beta$.

In equation (3.1) the minimum–requirement criterion is satisfied if one takes $p_\beta = \bar{p}$ for then the l_p contribution becomes constant and thus irrelevant. Hence $\mathcal{V}_\alpha = H$; $\mathcal{Y}_\alpha = H$ and (with obvious notations):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\beta &= F\{[s_\beta, \bar{p}, n_\beta, r_\beta]\} \\ X_\beta &= F\{[s_\beta, \bar{p}, n_\beta, r_\beta]\} - F[\bar{s}, \bar{p}, \bar{n}, 0] = \\ &= F\{[s, 0, n, r]\} = X_s \oplus X_n \oplus X_r \end{aligned}$$

Thus: $\bar{\mathcal{Y}}_\beta \cap \mathcal{Y}_\beta = \phi$; $\bar{\tau}_\alpha = \bar{\tau}$, no indeterminacy in τ_β exists and the functional reads

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}\langle \tau \rangle^2 - \langle \tau_\beta, \tau \rangle + (v_\beta, \bar{s}) - l_n(P v_\beta, \bar{n}) \\ \tau \in H;\ \tau_\beta = G v_\beta + \sigma_\beta;\ P_j v_\beta \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = \bar{p}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{3.5}$$

This is the most general two-field hybrid functional that can be obtained since τ is an arbitrary (i.e. unconstrained) element of H and $\mathcal{V}_\beta$ is subject only to the principal constraints on $\partial p_j \Omega$.

A similar procedure applied to equation (3.2) yields:

$$\begin{aligned} s_\beta = \bar{s}\ ;\quad n_\beta = \bar{n}\ ;\quad \mathcal{V}_\alpha = \mathcal{Y}_\alpha = H \\ \mathcal{Y}_\beta = X_p \oplus X_r\ ;\quad \mathcal{V}_\beta = \bar{\tau} + X_p \oplus X_r \end{aligned}$$

and the variational functional reads:

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}\langle \tau \rangle^2 - \langle \tau_\beta, \tau \rangle - l_p(\bar{p}, N\tau_\beta) \\ \tau \in H\ ;\ G^*\tau_\beta = \bar{s}\ ;\ N_j \tau_\beta \Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = \bar{n}_j \end{cases} \tag{3.6}$$

No indeterminacy in τ_β exists. One of the elements is still completely unconstrained, the other satisfies the source and the natural boundary constraints only.

When considering the other two general expression for $K(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ the term $\langle \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle$ may be made to disappear since otherwise one essentially falls back into the cases already dealt with.

Accordingly, the minimum criterion applied to equation (3.3) leads to:

$$\sigma_\beta = 0 \quad p_\beta = \bar{p}$$
$$\mathcal{V}_\alpha = H = \mathcal{Y}_\alpha \ ; \qquad \mathcal{V}_\beta = \bar{\tau} + X_s \oplus X_n$$

and the variational functional reads:

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2} \langle \tau_\alpha \rangle^2 + (v_\beta, \bar{s} - s_\alpha) + l_p(\bar{p}, N\tau_\alpha) - l_n(Pv_\beta, \bar{n} - n_\alpha) \\ P_j v_\beta \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = \bar{p}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{3.7}$$

This is a quite general two-fields hybrid functional since, once again, no constraints are imposed on τ_α and only the principal boundary constraints are imposed on $\mathcal{V}_\beta$. Compared with the functional (3.5), σ_β is disappeared but the source constraints of τ_α appears explicitely. If the restriction $s_\alpha = \bar{s}$ is imposed on τ_α, the term (,) disappears and:

$$\mathcal{V}_\alpha = \bar{\tau} + X_p \oplus X_n \oplus X_r \ ; \quad \{ \bar{\tau}_\beta \} = \bar{\tau} + X_s$$

The indeterminacy in $\bar{\tau}_\beta$ is however irrelevant since as said, K would not contain any volume integral of τ_β. The element τ_β can be made to disappear alltogether by further imposing the natural boundary constraint to the elements τ_α. The single field functional thus obtained is nothing but the classical "dual" variational functional K_D:

$$\begin{cases} K_D = \dfrac{1}{2} \langle \tau_\alpha \rangle^2 + l_p(\bar{p}, N\tau_\alpha) \\ G^* \tau_\alpha = \bar{s} \ ; \quad N_j \tau_\alpha \Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = \bar{n}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{3.8}$$

From the last expression (3.4) one finally gets:

$$\sigma_\alpha = 0 \ ; \quad s_\beta = \bar{s} \ ; \quad n_\beta = \bar{n}$$
$$\mathcal{V}_\alpha = X_\alpha \ ; \quad \mathcal{V}_\beta = \bar{\tau} + X_p \oplus X_r$$
$$\{ \bar{\tau}_\beta \} = \bar{\tau} + X_p \oplus X_r$$

and the variational functional reads:

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2} \langle Gv_\alpha \rangle^2 - (v_\alpha, \bar{s}) - l_p[\bar{p} - p_\alpha, N\tau_\alpha] + l_n[Pv_n, \bar{n}] \\ N_j \tau_\beta \Big|_{\partial_{n_j}\Omega} = \bar{n}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{3.9}$$

No constraint is imposed on $\mathcal{V}_\alpha$ and the indeterminacy in $\bar{\tau}_\beta$ is once again

irrelevant. As before, τ_β can be made to disappear by imposing the principal boundary constraints on $\mathcal{V}_\alpha$. The single field functional thus obtained is nothing but the classical "primal" variational functional K_p for the boundary value problem (2.11):

$$\begin{cases} K_p = \dfrac{1}{2} \langle G v_\alpha \rangle^2 - (v_\alpha, \bar{s}) + l_n(P v_\alpha, \bar{n}) = K_p(v_\alpha) \\ P_j v_\alpha \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = \bar{p}_j \qquad (1 \leq j \leq m) \end{cases} \tag{3.10}$$

4. — Generalizations.

The classes of variational functional can be widened by further decomposing the subspaces X_p and X_n. The argument will be developed in detail only for X_p. The constraint element corresponding to X_p is:

$$c_p = [0, p, 0, 0]$$

Let J be the index set $[1, 2, \ldots, m]$, J_a and J_b any partition of J and put $p = p_a + p_b$ with $p_a = [p_j]$, $j \in J_a$ and $p_b = [p_j]$; $j \in J_b$.

The restriction of $\langle\, ,\rangle$ to X_p will be written as:

$$\sum_{j \in J_a} l_{p_j}(p_j, N_j \tau') + \sum_{j \in J_b} l_{p_j}(p_j, N_j \tau') = l_{p_a}(p_a, N_a \tau') + l_{p_b}(p_b, N_b \tau') \tag{4.1}$$

Each contribution on the right hand side can be interpreted as the restriction of the inner product to two orthogonal complementary subspaces X_{p_a} and X_{p_b} defined by:

$$\begin{aligned} X_{p_a} &= \{ \tau \in X_p \,/\, P_j v \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = p_j, \;\; j \in J_a;\; P_j v \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = 0, \;\; j \in J_b \} \\ X_{p_b} &= \{ \tau \in X_p \,/\, N_j G v \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = 0, \;\; j \in J_a;\; P_j v \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = p_j, \;\; j \in J_b \} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Indeed, the corresponding constraint elements read:

$$c_{p_a} = [0, p_a + 0, 0, 0]$$

$$c_{p_b} = [0, p_a(p_b) + p_b, 0, 0]$$

so that $c_p = c_{p_a} + c_{p_b}$, $\forall\, c_p \in C_p$, the decomposition being unique when the usual assumption upon the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem corresponding to X_{p_b} is made.

Hence:

$$X_p = X_{p_a} \oplus X_{p_b}$$

and the orthogonality follows from equations (4.1) and (4.2). Notice that

for any $\tau \in X_{p_b}$ it is $N_j G v = 0$ $(j \in J_a)$ on the entire boundary $\partial\Omega$ since for any $\tau \in X_p$ it is $N\tau\Big|_{\partial\Omega} = n = 0$. Either subspace X_{p_a} or X_{p_b} can be further decomposed with the same procedure but such a development will be omitted.

Consider now the functional $K(\tau_a, \tau_\beta)$ and weaken the constraints on the variety $\mathcal{V}_\beta$ by letting:

$$\mathcal{V}_\beta = \bar{\mathcal{T}}_\beta[\mathcal{T}_\alpha \bar{\tau} + \bar{\mathcal{T}}_\alpha \tau_0] + \mathcal{Y}_\beta = \tau_1 + \mathcal{Y}_\beta$$

where τ_0 is an arbitrary but fixed element of H.

Hence $\mathcal{Y}_\beta$ is translated by an element τ_1 whose projection on $\bar{\mathcal{Y}}_\alpha$ is no longer equal to that of the solution element but quite arbitrary. It is readily shown that the stationary properties mentioned in paragraph (2.4) still hold with $\mathcal{V}_\gamma$ the translate of $\bar{\mathcal{Y}}_\alpha \cap \mathcal{Y}_\beta$ by τ_1 instead of τ.

As a consequence of this new definition of $\mathcal{V}_\beta$ one has " more freedom " in the process of elimination of the underlined terms from equations (3.1)$\div$(3.4). Indeed one can set the components of the constraint element c_β corresponding to the projection $\bar{\mathcal{T}}_\alpha \bar{\mathcal{T}}_\beta$ equal to some fixed but otherwise arbitrary value. As this can be done only when $\bar{\mathcal{T}}_\alpha \neq \phi$, i.e. $\mathcal{Y}_\alpha \neq H$, one readily sees that the suggested procedure amounts to " shift " a constraint from $\mathcal{V}_\beta$ to $\mathcal{V}_\alpha$.

Thus, for instance, one can eliminate the underlined term from equation (3.1) by setting:

$$p_{\beta a} = \bar{p}_a \; ; \qquad p_{\beta b} = p_{b0}$$

with p_{b0} arbitrary but fixed. The variational formulation is equivalent to the original boundary value problem if one restricts τ_α to the subset satisfying the principal boundary conditions $\bar{p}_b$.

Hence the new variational formulation reads:

$$\begin{cases} K = \dfrac{1}{2}\langle \tau_\alpha \rangle^2 - \langle \tau_\beta, \tau_\alpha \rangle + (v_\beta, \bar{s}) - l_n(Pv_\beta, \bar{n}) \\ P_j v_\alpha \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = p_j; \; j \in J_b; \quad P_j v_\beta \Big|_{\partial_{p_j}\Omega} = \bar{p}_j, \; j \in J_a \end{cases}$$

Comparison with equations (3.5) shows that the principal boundary constraint has been split into $(p_a + \bar{p}_b)$ and the part $\bar{p}_b$ has been "shifted" from the elements τ_β to the elements τ_α.

Similar developments can be applied to the other three expressions (3.2), (3.3), (3.4) and/or for the natural boundary constraints to obtain corresponding new sets of variational functionals.

Concluding remarks.

The inverse approach developed here makes it possible to unitareily derive hybrid and/or primal and dual variational formulations of classes of boundary value problems by starting from general explicit expressions for Gauss'formulae. The " degrees of freedom " are essentially constituted by the different " physical nature " of the elements τ (e.g. symmetric second order tensors, general second order tensors, higher order tensors, and so on), by the definition of the inner product (which, among other things, characterizes the set of principal and natural boundary differential operators and hence the types of boundary conditions that can be analysed) and by the selection of the " constitutive " part Gv of τ (which, for second and higher order tensors, can be done in more than one way). Changing any one of the above " degrees of freedom " leads to different classes of boundary value problems.

Examples of applications of the inverse approach will be illustrated in forthcoming papers. Also subject of a forthcoming paper is a last generalization of the approach which would consider the boundary $\partial\Omega$ partitioned in families of three subsets $\partial p_j\Omega$, $\partial n_j\Omega$, $\partial m_j\Omega$ with boundary conditions of the " third type " (prescribed values for linear combinations of P_j and N_j) being assigned on $\partial m_j\Omega$.

Acknowledgement.

This work has been sponsored in part by the Air Force Office of Scientific Research through the European Office of Aerospace Research, OAR, United States Air Force, Under Grant No. AFOSR 76-2889.

REFERENCES

[1] Napolitano L. G. (1973), *Unified Functional Approach to the Solution of Formally Adjoint Problems of Continuum Mechanics*, " Letters in Applied and Engineering Sciences ", vol. 1, pp. 465-379.

[2] Napolitano L. G. (1973), *Functional Analysis Derivation and Generalization of Hybrid Variational Methods*, I.A.R. no. 218. Final Scientific Report, Grant AFOSR-73-2508.

[3] Napolitano L. G. (1974), *On the functional Analysis Derivation and Generalization of Hybrid Methods*, Proceedings II Meeting AIMETA, Naples. Also: " Meccanica ", vol. 10, no. 3 (Sept. 1975).

[4] Napolitano L. G. (1975), *Functional Analysis Approach for the Derivation of Hybrid Variational Functionals*, Proc. IUTAM/IUM Simp, Marseille. Also: *Application of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, " Lecture Notes in Mathematics ", 503, Springer Verlag (1976).

[5] Lions J. L., Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod, Paris (1968).



INDICE

A.S.
6,00